Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники. 2023. Т. 26, № 4. С. 309—299.
DOI: 10.17073/1609-3577j.met202307.483

УДК 621.315;004.3:004.93

Расчет механического напряжения под действием силы теплового расширения в трехмерных твердотельных конструкциях с помощью математического моделирования

© *2023 г.* **К. А. Иванов[1], Е. В. Каевицер[1,2], А. А. Золотарев[3,✉]**

[1] ***АО «НПП «Пульсар»,***
Окружной проезд, д. 27, Москва, 105187, Российская Федерация

[2] ***Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»,***
Ленинский просп., д. 4, стр. 1, Москва, 119049, Российская Федерация

[3] ***МИРЭА – Российский технологический университет,***
просп. Вернадского, д. 78, Москва, 119454, Российская Федерация

✉ *Автор для переписки: zolotarev@mirea.ru*

Аннотация. В конце XX в. резко возрос спрос на более эффективные методы решения больших разреженных неструктурированных линейных систем уравнений. Классические одноуровневые методы уже достигли своих пределов, и необходимо было разработать новые иерархические алгоритмы, чтобы обеспечить эффективное решение еще более сложных задач. Эффективное численное решение больших систем дискретных эллиптических уравнений в частных производных требует иерархических алгоритмов, которые обеспечивают быстрое уменьшение как коротковолновых, так и длинноволновых компонент в разложении вектора ошибки. Прорыв в решении данных задач, был обусловлен многосеточным принципом — одним из самых важных достижений за последние три десятилетия. Любой соответствующий метод работает с иерархией сеток, заданной априори путем огрубления данной сетки дискретизации геометрически естественным образом («геометрический» многосеточный метод). Тем не менее определение естественной иерархии может стать трудным для очень сложных, неструктурированных сеток, если возможно вообще. Предложен алгоритм расчета деформации, возникающей под действием силы теплового расширения, в трехмерных твердотельных моделях на основе сеточной аппроксимации задачи гексагональными 8–узловыми ячейками. Работа алгоритма иллюстрируется при решении трех задач.

Ключевые слова: механическое напряжение, тепловое расширение, математическое моделирование, закон Гука, деформация

Для цитирования: Иванов К.А., Каевицер Е.В., Золотарев А.А. Расчет механического напряжения под действием силы теплового расширения в трехмерных твердотельных конструкциях с помощью математического моделирования. *Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники.* 2023; 26(4): 309—299. https://doi.org/10.17073/1609-3577j.met202307.483

© 2023 National University of Science and Technology “MISIS”.
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author and source are credited.

Method for calculating a thermal expansion induced mechanical stress in three–dimensional solid–state structures using mathematical modeling

K. A. Ivanov[1], E. V. Kaevitser[1,2], A. A. Zolotarev[3,✉]

[1] ***JSC "S&PE "Pulsar",*** *27 Okruzhnoy Passage, Moscow 105187, Russian Federation*

[2] ***National University of Science and Technology "MISIS",*** *4–1 Leninsky Ave., Moscow 119049, Russian Federation*

[3] ***MIREA – Russian Technological University,*** *78 Vernadsky Ave, Moscow 119454, Russian Federation*

✉ *Corresponding author: zolotarev@mirea.ru*

Abstract. At the end of the 20th century, the demand for more efficient methods for solving large sparse unstructured linear systems of equations increased dramatically. Classical single–level methods had already reached their limits, and new hierarchical algorithms had to be developed to provide efficient solutions to even larger problems. Efficient numerical solution of large systems of discrete elliptic PDEs requires hierarchical algorithms that provide a fast reduction of both shortwave and longwave components in the error vector expansion. The breakthrough, and certainly one of the most important advances of the last three decades, was due to the multigrid principle. Any appropriate method works with a grid hierarchy specified a priori by coarsening a given sampling grid in a geometrically natural way (a "geometric" multigrid method). However, defining a natural hierarchy can become very difficult for very complex, unstructured meshes, if possible at all. The article proposes an algorithm for calculating the deformation that occurs under the action of a thermal expansion force in three–dimensional solid models based on a grid approximation of the problem by hexagonal 8–node cells. The operation of the algorithm is illustrated by solving three problems.

Keywords: mechanical stress, thermal expansion, mathematical modeling, Hooke's law, deformation

For citation: Ivanov K.A., Kaevitser E.V., Zolotarev A.A. Method for calculating a thermal expansion induced mechanical stress in three–dimensional solid–state structures using mathematical modeling. *Izvestiya vuzov. Materialy elektronnoi tekhniki = Materials of Electronics Engineering*. 2023; 26(4): 309—299. https://doi.org/10.17073/1609-3577j.met202307.483

Введение

Для расчета напряженно–деформируемого состояния в задачах термоупругости в настоящее время существует большое число программных комплексов: ANSYS Mechanical, SIMULA Abaqus, NX Nastran, COSMOS Works. Для первичного расчета небольших задач рассматривается авторская реализация механического решателя (AliceFlow) [1], отличающаяся простотой создания и использования. Авторская реализация программы [1] рассмотрена на примере решения трех задач: 1) механическое проектирование и анализ гальванического покрытия медной пленкой подложки из нитрида аллюминия AlN при термической обработке [2, 3]; 2) тепловая деформация керамических плат согласования мощных кремниевых LDMOS транзисторов; 3) моделирование механических деформаций апертуры [4].

Эффективное численное решение больших систем дискретных эллиптических уравнений в частных производных **(PDE)** требует иерархических алгоритмов, которые обеспечивают быстрое уменьшение как коротковолновых, так и длинноволновых компонент в разложении вектора ошибки. Благодаря появлению и внедрению многосеточного принципа появилась возможность работать с иерархией сеток, заданной огрублением с учетом дискретизации геометрии.

Первая попытка автоматизации процесса укрупнения была предпринята в начале 1980–х годов, в то время, когда так называемая интерполяция, зависящая от принципа Галеркина и оператора Галеркина, была объединена в геометрический многосеточный метод для повышения его устойчивости (в целях решения задач диффузии со скачкообразными коэффициентами). Эта попытка была мотивирована наблюдением, что разумная,

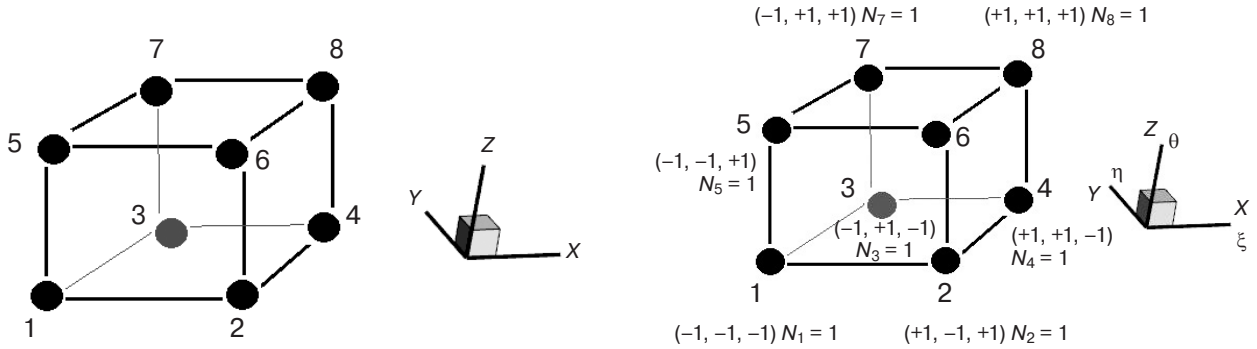

Рис. 1. Ячейка расчетной сетки и нумерация узлов
Fig. 1. Calculation grid cell and numbering of nodes

зависящая от оператора, интерполяция и оператор Галеркина часто могут быть получены непосредственно из базовых матриц, без какой–либо ссылки на сетки. Результатом стал многосеточный подход, который не просто позволял выполнять процесс автоматического укрупнения, но мог быть непосредственно применен к (разреженным системам уравнений) алгебраическим уравнениям определенных типов без какой–либо заранее определенной иерархии («алгебраический» многосеточный метод, AMG).

В статье предложен вариант расчета механического напряжения под действием силы теплового расширения в трехмерных твердотельных конструкциях с использование алгоритмов, использующих многосеточный метод.

Уравнения и алгоритм решения задач

Пусть при температуре T_0 = 22 °C деформации полностью отсутствуют. Рассмотрим вектор деформации (или смещение) $u(x, y, z)$ равный по определению разности позиций (смещений) между деформированным состоянием тела при температуре $T \neq T_0$ и недеформированным его состоянием при температуре T_0: $u(T_0) = 0$.

Внешние воздействия и сопротивляющиеся им внутренние силы при деформировании твердого тела затрачивают минимально возможное количество энергии [4]. Энергия механической системы Э выражается как функция энергии от вектора функции смещений $u = [u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z)]$:

$$Э(u) = \frac{1}{2}(Ku, u) - (F, u); \quad (1)$$

$$Э(u) \xrightarrow{\Delta} \min, \quad (2)$$

где u — смещение, м; $u = (u_x, u_y, u_z)$, u_x, u_y, u_z — проекции вектора перемещения на ось Ox, Oy, Oz декартовой прямоугольной системы координат соответсвенно; K — матрица жесткости; F — вектор узловых сил; (·,·) — скалярное произведение двух векторов.

Многие, встречающиеся на практике, компьютерные модели задач термоупругости могут быть представлены с достаточной точностью набором гексагональных шестигранных ячеек. Криволинейная граница расчетной области, при ее наличии, аппроксимируется ступеньками. Рассмотрим один конечный элемент в форме гексаэдра (рис. 1), нумерация вершин гексагональной ячейки расчетной сетки которого представлена на рис. 1.

Рассмотрим функции формы:

$$N_1 = [(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \theta)]/8;$$

$$N_2 = [(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \theta)]/8;$$

$$N_3 = [(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \theta)]/8;$$

$$N_4 = [(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \theta)]/8;$$

$$N_5 = [(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \theta)]/8;$$

$$N_6 = [(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \theta)]/8;$$

$$N_7 = [(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \theta)]/8;$$

$$N_8 = [(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \theta)]/8,$$

по одной на каждую вершину конечного элемента в форме гексаэдра.

Переменные ξ, η и θ принимают значения от −1 до +1. Функция формы N_i принимает значение 1 в узле с локальным номером i и значения 0 в остальных локальных узлах. Функции формы предназначены для реконструкции значений рассчитываемых смещений из вершин конечного элемента во внутренние точки конечного элемента, а также для нахождения производных от функции смещений

$$u(\xi, \eta, \theta) = \sum_{i=1}^{8} N_i u_i, \quad (3)$$

где u_i — значение смещения в вершине конечного элемента в форме гексаэдра с локальным номером i = 1, ..., 8.

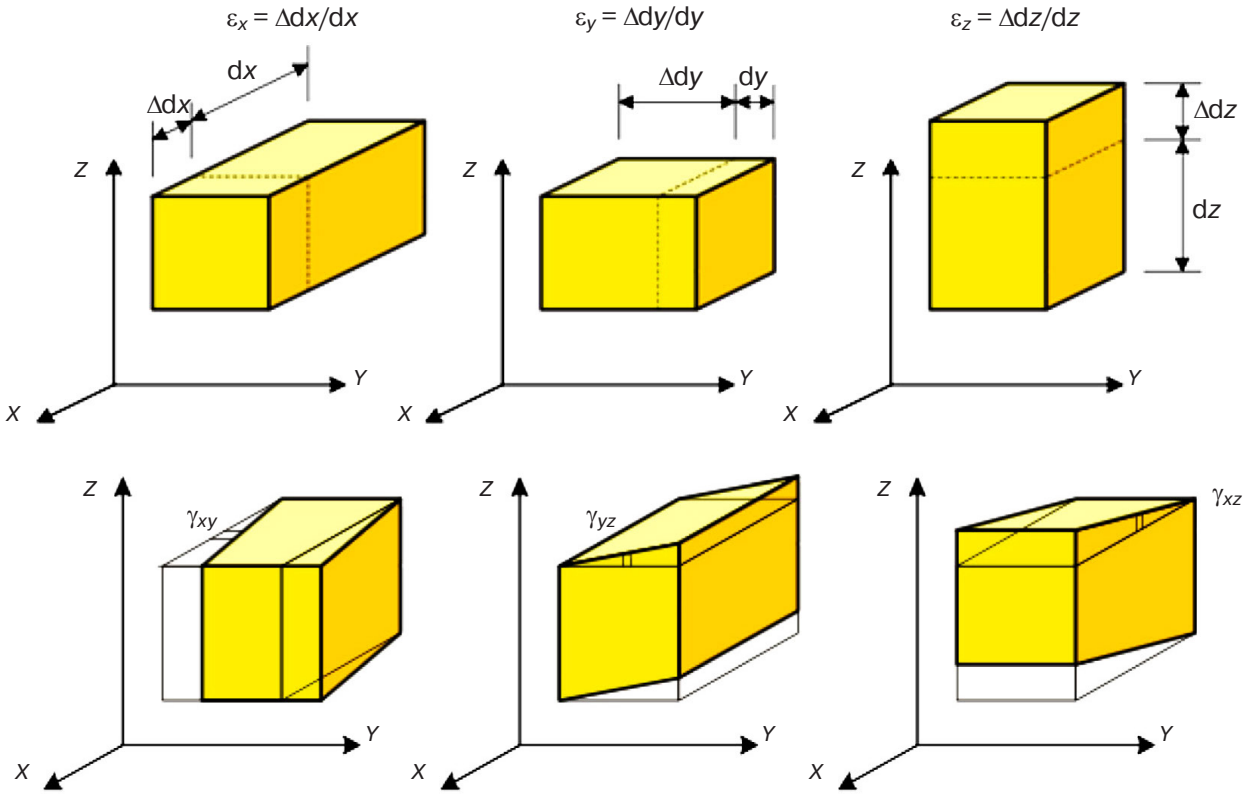

Рис. 2. Деформации
Fig. 2. Deformations

При решении механических задач помимо вектора деформации (рис. 2) или смещения рассматривают также тензор деформации

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_E \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}, \tag{4}$$

который после введения дифференциального оператора Коши (A)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

записывается в виде $\varepsilon = Au$.

При наличии существования в твердом теле разности температур отличной от нуля $T \neq T_0$ тепловые деформации записываются в виде

$$\varepsilon^t = \begin{Bmatrix} \alpha_x (T - T_0) \\ \alpha_y (T - T_0) \\ \alpha_z (T - T_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{6}$$

где $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ — ортотропный коэффициент линейного теплового расширения; тензор деформации принимает вид: $\varepsilon = Au - \varepsilon^t$.

При решении задач термоупругости рассматривается также тензор напряжений

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}, \tag{7}$$

связанный с тензором деформаций через закон Гука:

$$\sigma = D\varepsilon, \tag{8}$$

где матрица D размером 6×6 зависит только от свойств материала, из которого состоит рассматриваемая ячейка:

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (9)$$

здесь $\lambda = \frac{\nu}{1-\nu}$, $\mu = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$.

Ортотропные материалы, такие как дерево или однонаправленные композиты, более сложны для анализа, чем изотропные материалы, потому что их свойства зависят от направления. В ортотропных материалах есть 2 или 3 взаимно перпендикулярных оси симметрии, относительно которых свойства материала значительно отличаются — если взять, для примера, дерево, то его свойства вдоль и поперек волокон сильно различаются.

Из–за различных свойств в трех взаимно перпендикулярных направлениях для полного описания ортогонального материала требуется 9 независимых свойств материалов. Модуль упругости отличается для всех трех направлений (E_x, E_y, E_z), аналогично для модулей сдвига (G_{xy}, G_{yz}, G_{xz}) и коэффициентов Пуассона (ν_{xy}, ν_{yz}, ν_{xz}). Формула матрицы, обратной матрицы обобщенного Закона Гука приводиться в (10).

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_z & -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где D^{-1} — матрица обратная матрице обобщенного закона Гука (D); $E = (E_x, E_y, E_z)$ — ортотропный модуль Юнга; $G = (G_{xy}, G_{yz}, G_{xz})$ — ортотропный модуль сдвига; (ν_{xy}, ν_{yz}, ν_{xz}) — ортотропный коэффициент Пуассона.

Всего существует 9 параметров в ортотропном случае.

Минимум функции энергии, достигаемый глобально во всей расчетной области, приводит к тому, что функция энергии минимальна также одновременно и на каждой ячейке расчетной сетки. Принцип минимума функции энергии механической системы позволяет произвести аппроксимацию задачи механики на одной ячейке (см. рис. 1), а на всей расчетной области аппроксимация будет получена суммированием локальных матриц жесткости по принципу суперпозиции.

Принцип минимума энергии Э(u) → min механической системы приводит к тому, что для нахождения вектора деформации u требуется решить систему линейных алгебраических уравнений **(СЛАУ)**:

$$\mathbf{K}u = \mathbf{F},$$

где K — матрица жесткости механической системы, Н/м; F — сила теплового расширения, Н.

Порядок нумерации вектора узловых сил и вектора узловых перемещений:

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{Bmatrix}, \quad \{u_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Локальная матрица жесткости **K** размером 24×24 аналитически вычисляется через интеграл по объему от пятикратного матричного произведения [6]:

$$K = \int_{\theta=-1}^{\theta=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \left\{ \left((A[N])^T D \right) (A[N]) \right\} |J| d\xi d\eta d\theta, \quad (12)$$

а сила F, или правая часть СЛАУ, размером 24×1 аналитически вычисляется через интеграл по объему от четырехкратного матричного произведения

$$F = \int_{\theta=-1}^{\theta=1} \int_{\eta=-1}^{\eta=1} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \left\{ \left((A[N])^T D \right) \left(\varepsilon^t \right) \right\} |J| d\xi d\eta d\theta, \quad (13)$$

где $|J|$ — определитель матрицы Якоби (J), рассчитываемый согласно следующему матричному произведению:

$$dShape(\xi, \eta, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & \frac{\partial N_5}{\partial \xi} & \frac{\partial N_6}{\partial \xi} & \frac{\partial N_7}{\partial \xi} & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & \frac{\partial N_5}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} & \frac{\partial N_7}{\partial \eta} & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \theta} & \frac{\partial N_2}{\partial \theta} & \frac{\partial N_3}{\partial \theta} & \frac{\partial N_4}{\partial \theta} & \frac{\partial N_5}{\partial \theta} & \frac{\partial N_6}{\partial \theta} & \frac{\partial N_7}{\partial \theta} & \frac{\partial N_8}{\partial \theta} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$Coordinates = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -dx & -dy & -dz \\ dx & -dy & -dz \\ -dx & dy & -dz \\ dx & dy & -dz \\ -dx & -dy & dz \\ dx & -dy & dz \\ -dx & dy & dz \\ dx & dy & dz \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$J = dShap \times Coordinates, \quad (16)$$

```
GaussPoint = [−1/√3  +1/√3]; GaussWeight = [1 1]; iGn = 2;
for i1 = 0: (iGn –1)
    for i2 = 0: (iGn –1)
        for i3 = 0: (iGn –1)
            x* = GaussPoint[i1];
            y* = GaussPoint[i2];
            z* = GaussPoint[i3];
            J: = dShape(x*, y*, z*)*Coordinates;
            Auxiliar : = J^-1 dShape(x*, y*, z*);
        % Preallocate memory for B–Operator
        B = zeros(6,24);
        % Construct first three rows
        for i=1:3
            for j=0:7
                B(i,3*j+1+(i–1)) = auxiliar(i,j+1);
            end
        end
        for j=0:7
            % Construct fourth row
            B(4,3*j+1) = auxiliar(2,j+1);
            B(4,3*j+2) = auxiliar(1,j+1);
        % Construct fifth row
        B(5,3*j+3) = auxiliar(2,j+1);
        B(5,3*j+2) = auxiliar(3,j+1);
        % Construct sixth row
        B(6,3*j+1) = auxiliar(3,j+1);
        B(6,3*j+3) = auxiliar(1,j+1);
    end
double weight= GaussWeight[i1]* GaussWeight[i2] *GaussWeight[i3];
    % Add to stiffness matrix
        K = K + weight*B^T*D*B*det(J);
        % вектор силы хранится в вершинах кубической ячейки
        F = F+ weight*B^T*D**det(J);
        end; end; end
```

Рис. 3. Алгоритм расчета матрицы жесткости K и силы теплового расширения F: K — механическая матрица жесткости; D — матрица механических свойств материала; B^T — транспонированная матрица B; $det(J)$ — скаляр, определитель матрицы Якоби; ε^t — тепловая деформация

Fig. 3. Algorithm for calculating the stiffness matrix K and thermal expansion forces F: K is the mechanical stiffness matrix; D is the matrix of mechanical properties of the material; B^T is the transposed matrix B; $det(J)$ is a scalar determinant of the Jacobi matrix; ε^t is the thermal deformation

Матрица жесткости K и вектор силы F теплового расширения вычисляются по алгоритму, представленному на рис. 3.

Локальная матрица жесткости для конечного элемента в форме гексаэдра имеет размер 24×24, размерность каждого элемента матрицы жесткости $\mathbf{K}$ — Н/м. Локальный вектор силы F имеет размер 24 и измеряется в Н.

Систему уравнений $\mathbf{K}u = F$ с матрицей жесткости (12) для расчета перемещений узлов исследуемого образца — u под воздействием заданной силы F (13) нужно дополнить граничными условиями — в некоторых узлах расчетной сетки некоторые узловые смещения требуется зафиксировать равными нулю. Для решения задачи линейной алгебры $\mathbf{K}u = F$ использовался алгоритм BiCGStab для несимметричных матриц, предобусловленный алгебраическим многосеточным методом PMIS со сглаживателем ilu6 и выше [8].

Критерий максимального напряжения по Мизесу основывается на теории Мизес—Хенки (Mises—Hencky):

$$\sigma_{vonMises} = \sqrt{0{,}5\left[\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_x - \sigma_z\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right]}, \quad (17)$$

где σ — напряжение, Па.

Более подробно описание способа решения расчета механического напряжения в трехмерных твердотельных конструкциях представлено в [9—18].

Детали программной реализации

Поле температур необходимое для тепломеханического расчета находилось с помощью решения уравнения теплопередачи методом контрольного объема. Система линейных алгебраических урав-

нений как для теплопередачи, так и для механики решались алгоритмом BiCGStab + ilu(4) до значения невязки 10^{-10}.

Механическая часть считалась более чем на порядок дольше тепловой.

Постановка задач и результаты

Для проверки работоспособности программы и демонстрации ее возможностей рассматриваются три тепломеханические задачи:

1) механическое проектирование и анализ гальванического покрытия медной пленкой подложки из нитрида алюминия AlN при термической обработке;

2) тепловая деформация керамических плат согласования мощных кремниевых LDMOS–транзисторов;

3) моделирование механических деформаций апертуры.

Рассмотрим эти задачи подробнее.

Первая задача. Пластина из нитрида алюминия толщиной 370 мкм с медным покрытием толщиной 30 мкм имеет размеры в плане 30×30 мм^2. Температура нулевой деформации равна 105 °C. Фиксация смещений производится аналогично постановке классической задачи Кирша. То есть модель состоит из четверти пластины и пластина расположена при $x > 0$ и $z > 0$. Нормаль к пластине совпадает с осью Oy.

На границе $x = 0$, $z > 0$ — горизонтальное смещение равно нулю $u_x = 0$; на границе $x > 0$, $z = 0$ — смещение равно нулю $u_z = 0$. Остальные границы свободны от фиксации (рис. 4 и 5).

Механические свойства материалов, используемые в расчете, представлены в табл. 1.

Таблица 1 / Table 1

Механические свойства материалов
Mechanical properties of materials

Материал	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	КТЛР, 10^{-6} К$^{-1}$
AlN	340	0,25	4,3
Медь	114	0,34	16,5

Результаты моделирования деформации пластины AlN с медным покрытием при различных температурах сведены в табл. 2 и 3.

Таблица 2 / Table 2

Максимальное смещение и максимальное напряжение по Мизесу
Maximum displacement and maximum von Mises stress

t, °C	Максимальное смещение, мкм		Максимальное напряжение по Мизесу, МПа	
	AlN	Медь	AlN	Медь
25	10,0	10,1	151,8	163,0
60	5,8	5,8	86,6	92,2
155	6,4	6,4	95,9	102,2
245	17,9	17,9	268,5	286,2
205	12,8	12,8	192	204
80	3,2	3,2	48	51,1

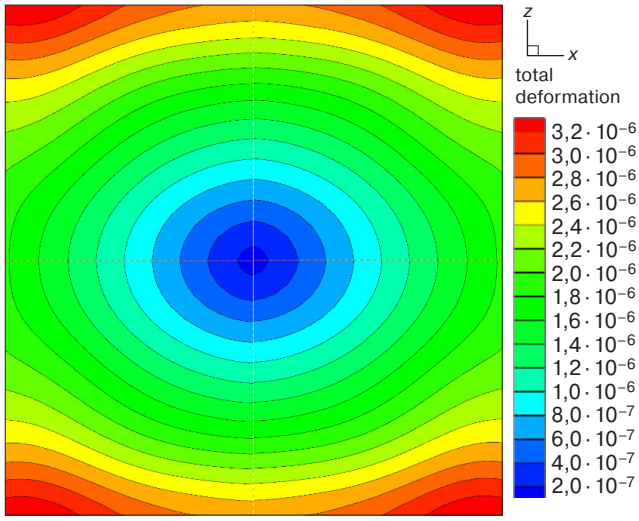

Рис. 4. Смещение AlN пластины при перепаде температур +25 °C

Fig. 4. Displacement of the AlN plate at a temperature difference of +25 °C

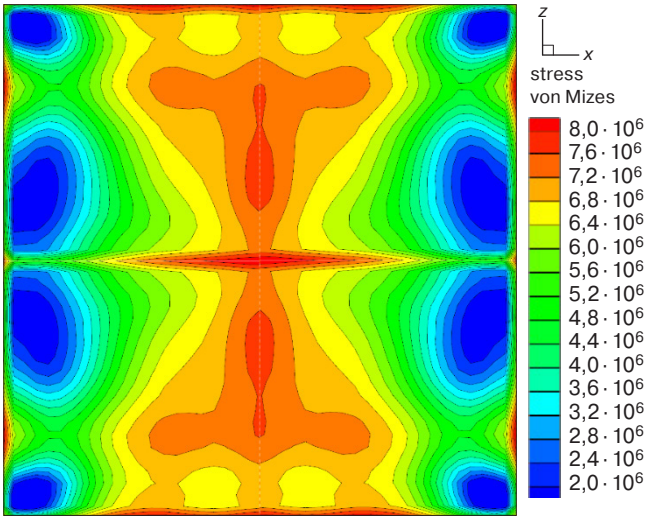

Рис. 5. Напряжение по Мизесу AlN пластины при перепаде температур +25 °C

Fig. 5 Mises stress of AlN plate at a temperature difference of +25 °C

Таблица 3 / Table 3

Влияние толщины медной пленки на смещение и напряжение по Мизесу при Δ*t* = 1 °C

Effect of copper film thickness on displacement and von Mises stress at Δ*t* = 1 °C

h_{Cu}, мкм	Максимальное смещение, мкм		Максимальное напряжение по Мизесу, МПа	
	AlN	Медь	AlN	Медь
Край меди располагается вровень с краем AlN				
30	0,128	0,128	1,92	2,04
50	0,129	0,130	2,086	2,092
100	0,126	0,129	2,046	2,014
200	0,138	0,146	2,586	1,867
300	0,161	0,169	2,927	1,820
Край меди отстоит на 3 мм от края AlN				
30	0,158	0,105	1,875	2,132
50	0,154	0,106	1,706	2,069
100	0,151	0,109	2,117	2,094
200	0,164	0,122	2,474	2,182
300	0,172	0,130	3,249	2,471

Вторая задача. Тепловая деформация керамических плат согласования мощных кремниевых LDMOS–транзисторов.

Изображение рассчитываемой компьютерной модели приведено на рис. 6.

Основания всех шести стальных винтов неподвижно зафиксированы: четыре винта по краям медного основания и два по центру. Остальные стальные винты скрепляют МД40 держатель и медное основание. В табл. 4 и 5 представлены механические свойства материалов и максимальные смещения и напряжения по фон Мизесу.

Предел прочности на изгиб составляет 450 МПа.

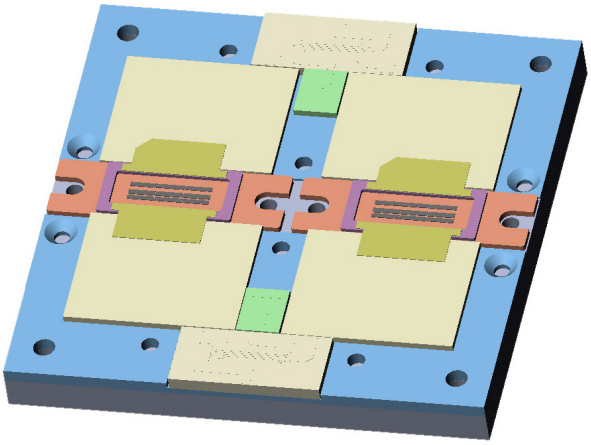

Рис. 6. Изображение рассчитываемой модели
Fig. 6. Image of the calculated model

Таблица 4 / Table 4

Механические свойства используемых материалов

Mechanical properties of the materials used

Материал	Модуль Юнга, ГПа	Коэффициент Пуассона	КЛТР, 10^{-6} 1/К
Поликор	340	0,22	7,8
Припой ПОС	12	0,24	27,5
МД40	195	0,32	8,65
Медь	114	0,34	16,5
Сталь	200	0,26	24,6

Таблица 5 / Table 5

Сводная таблица максимальных смещений и максимальных напряжений по фон Мизесу

Summary table of maximum displacements and maximum stresses according to von Mises

Температура, °C	Максимальное перемещение, мкм	Эквивалентное напряжение фон Мизес, МПа			
		Поликор	ПОС	МД40	Медь
Толщина поликора = 2 мм					
120	52,9	691	365	790	2458
100	42,3	553,4	292	632	1966
80	31,7	415	219	474	1475
65	23,8	311,7	164,5	356	1106
40	10,6	139	73,1	158,1	491,3
0	10,03	131,6	69,4	150,2	466,8
−20	21,1	277	146,1	316,2	983
−40	31,7	415	219	474	1475
−65	44,9	588	310,2	672	2089
Толщина поликора = 1 мм					
120	53,3	568	302,9	650	2473
100	42,7	454	242	520	1978
80	32	341	182	390	1484
65	24	255,9	136,5	292,4	1112
40	10,64	113	60,6	130,1	494,7
0	10,1	108	57,7	123,4	469,6
−20	21,3	227,5	121,4	260	988,7
−40	31,99	341	181,7	390	1484
−65	45,32	482,7	257,4	552	2102
Толщина поликора = 0,5 мм					
120	53,8	449	234	517,3	2486
100	43,0	358	186	414	1989
80	32,3	268,1	140,6	310,2	1492
65	24,2	201	104	232,6	1119
40	10,7	90,4	47,2	103,7	497
0	10,2	85,87	44	98,5	472
−20	21,5	178,7	93	206,8	995
−40	32,3	268,0	140,6	310,3	1492
−65	45,7	382	199	440	2114

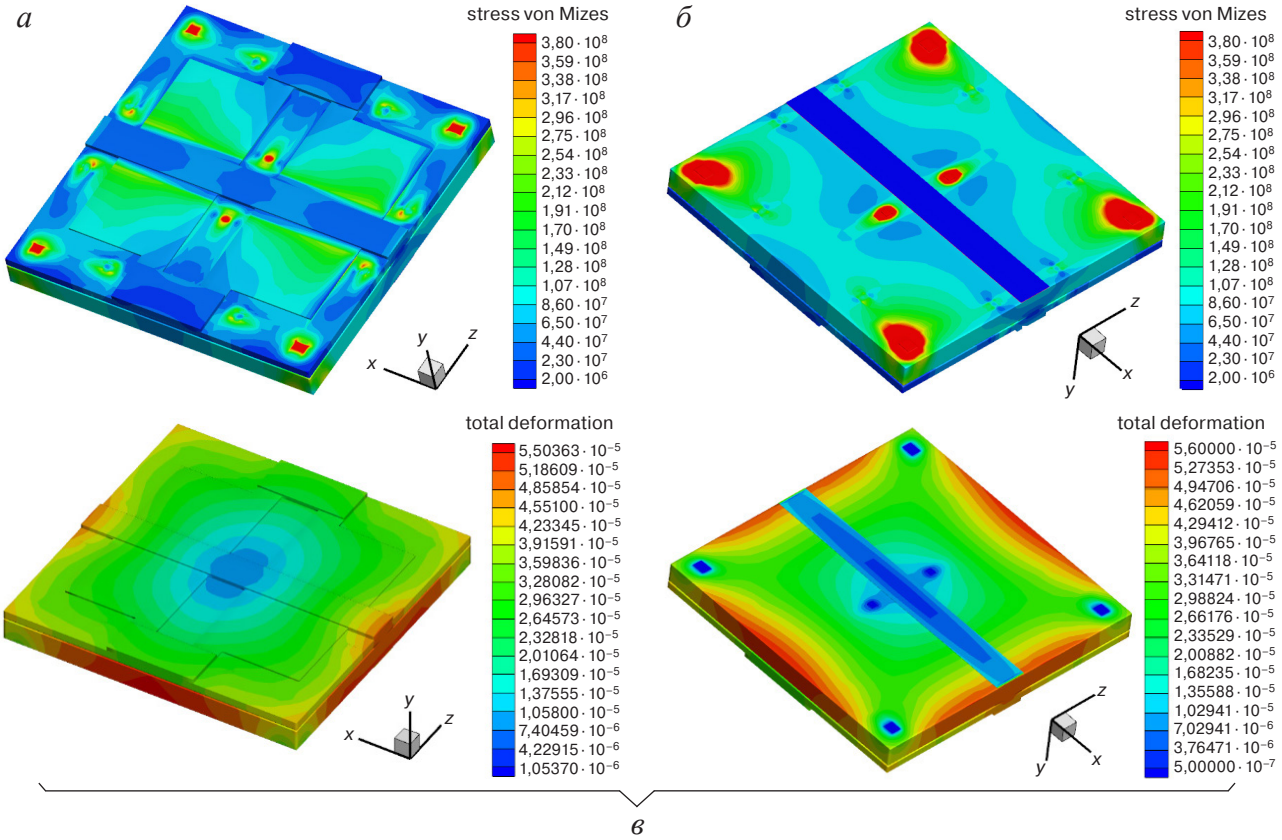

Рис. 7. Результаты моделирования: *а* — напряжение по Мизесу, Па, при температуре = +120 °С, толщина поликора = 0,5 мм, с припоем ПОС = 25мкм под поликором, толщина меди = 5 мм (вид сверху); *б* — напряжение по Мизесу, Па, при температуре = +120 °С, толщина поликора = 0,5 мм, с припоем ПОС = 25 мкм под поликором, толщина меди = 5 мм (вид снизу); *в* — смещение, м, при температуре = +120 °С, толщина поликора = 0,5 мм, с припоем ПОС = 25 мкм под поликором, толщина меди = 5 мм

Fig. 7. Simulation results: (*a*) von Mises stress, Pa, at temperature of 120°C, polychorus thickness = 0.5 mm, with POS solder = 25 μm under polychorus, copper thickness = 5 mm (top view); (б) Mises stress, Pa, at temperature of 120 °C, polychorus thickness of 0.5 mm, with POS solder = 25 μm under polychorus, copper thickness = 5 mm (bottom view); (*в*) displacement, m, at temperature of 120 °C, polychorus thickness of 0.5 mm, with POS solder = 25 μm under polychorus, copper thickness = 5 mm

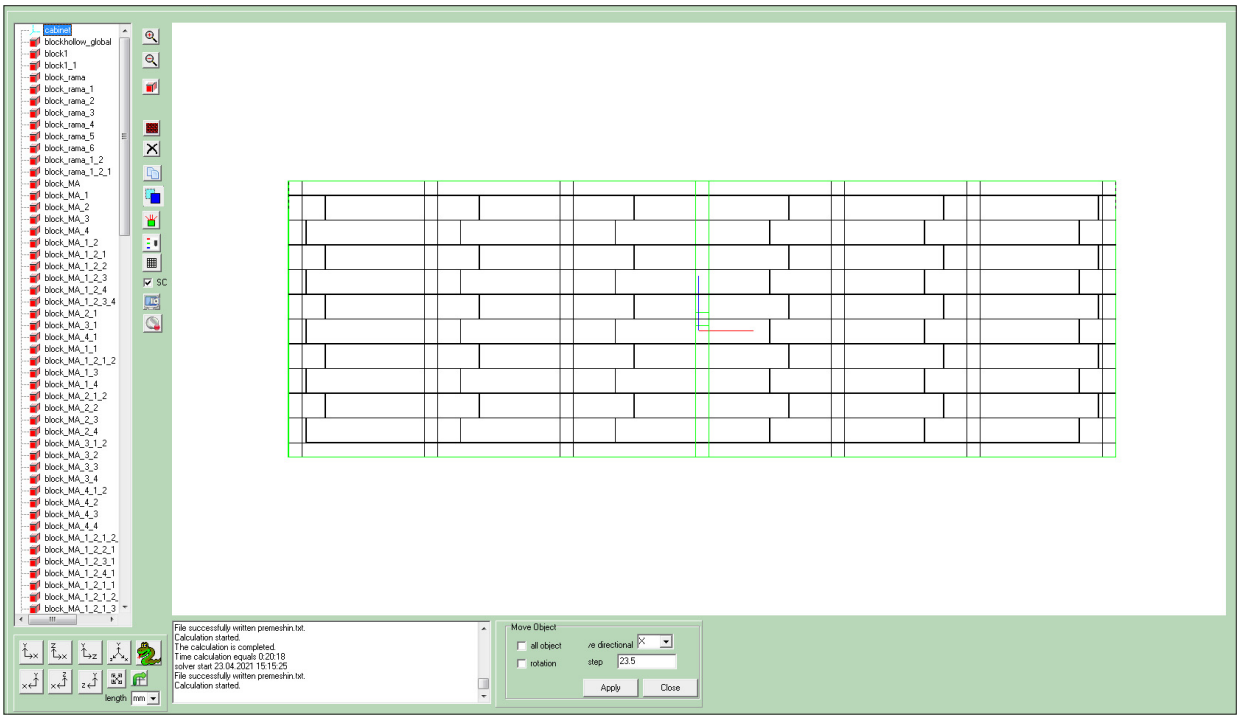

Рис. 8. Симметричная модель со щелями

Fig. 8. Symmetrical model with slots

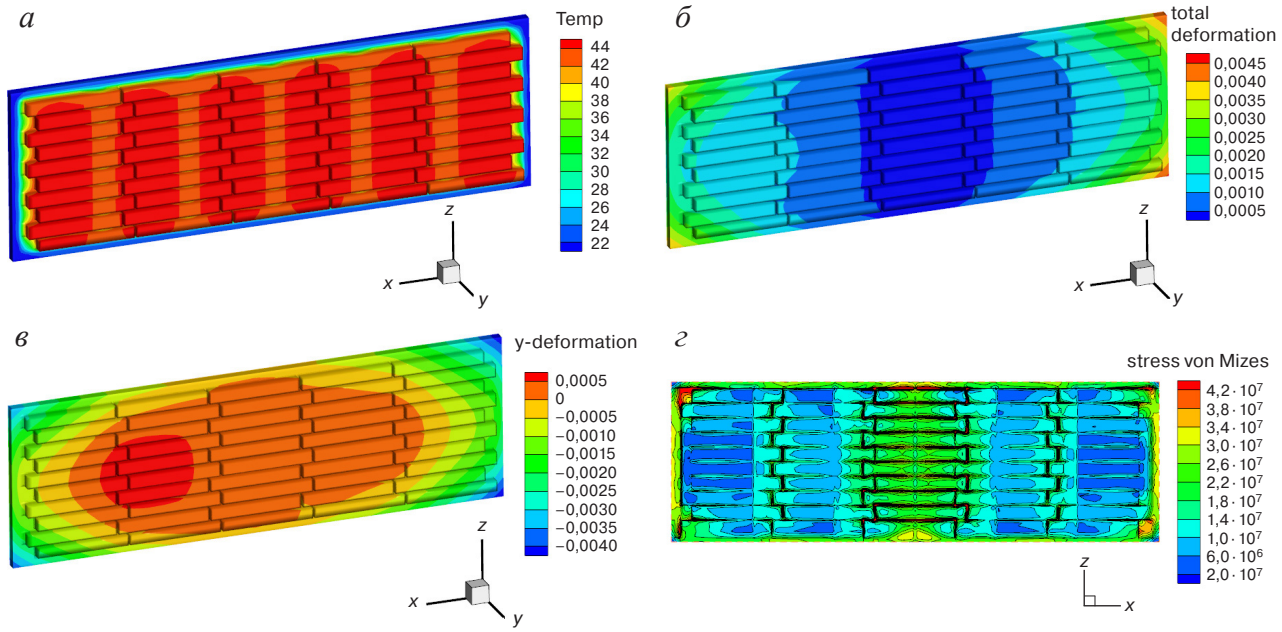

Рис. 9. Результаты моделирования: а — перепад температур = +25 °С; *б* — модуль смещения, м (перепад температур = +25 °С); *в* — нормальное смещение, м (перепад температур = +25 °С); *г* — напряжение по Мизесу, Па (перепад температур = +25 °С)

Fig. 9. Simulation results: (*а*) temperature difference = +25 °C; (*б*) displacement modulus, m (temperature difference = +25 °C); (*в*) normal displacement, m (temperature difference = +25 °C); (*г*) von Mises stress, Pa (temperature difference = +25 °C)

Третья задача. Моделирование механических деформаций апертуры .

Расчетная модель из алюминия представлена на рис. 7 и 8.

Модель состоит из рамы сечения 100 × 100 мм^2, двух листов по 10 мм каждый; 50 модулей, расположенных в 10 рядов по 5 штук в ряде со щелями между модулями. Модули выполнены из алюминиевых параллелепипедов. Размер (основания) изделия 6 × 1,8 м^2. Центр основания закреплен. Результаты моделирования представлены на рис. 9.

Заключение

Проведен анализ существующих алгоритмов, используемых в многосеточном методе решения СЛАУ. На основе анализа методов решения СЛАУ с использованием многосеточного принципа разработана программа на языке C/C^{++}, предназначенная для расчета тепловой деформации твердотельных конструкций в трехмерной постановке. Тестирование программы проводилось на примере решения трех задач: 1) механическое проектирование и анализ гальванического покрытия медной пленкой подложки из нитрида алюминия AlN при термической обработке; 2) тепловая деформация керамических плат согласования мощных кремниевых LDMOS–транзисторов; 3) моделирование механических деформаций апертуры. На основе тестирования программы сделан вывод о том, что программа выдает верифицированные данные с использованием многосеточного метода решения СЛАУ в вышеуказанных задачах.

Библиографический список / References

1. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ (РФ) № 2019614711. Золотарев А.А., Иванов К.А. Программа расчета напряженно–деформированного состояния металломатричного композита ([aliceflowv0_32]) Заявл.: 02.04.2019, зарегистр.: 10.04.2019.

Certificate of registration of the computer program (Ru) No. 2019614711. Zolotarev A.A., Ivanov K.A. The program for calculating the stress–strain state of a metal matrix composite ([aliceflowv0_32]). Appl.: 04.02.2019, reg.: 04.10.2019. (In Russ.)

2. Lin C.H., Huang P.S., Tsai M.Y., Wu C.T., Hu S.C. Mechanical design and analysis of direct plated copper film on AlN substrates for thermal reliability in high power module applications. *Inter. conf. on electronics packaging and iMAPS All Asia Conference (ICEP–IAAC)*. Kyoto, Japan; 2015. P. 185—188. https://doi.org/10.1109/ICEP-IAAC.2015.7111025.10.1109/ICEP-IAAC.2015.7111025

3. Выписка из технических условий ТУ 23.43.10–003–34576770–2017. Керамические подложки ВК96–ДН (содержание Al_2O_3 не менее 96%). Технические условия (ТУ) 23.43.10–003–34576770–2017. Керамические подложки ВК96–ДН (содержание Al_2O_3 не менее 96%).

Specifications (TU) 23.43.10–003–34576770–2017. Ceramic substrates VK96–DN (Al_2O_3 content not less than 96%). (In Russ.)

4. Прилуцкий А.А., Сидорчук Е.А., Петров А.С. Моделирование механических деформаций апертуры и анализ их влияния на диаграмму направленности АФАР космических аппаратов. *Вестник НПО им. С.А. Лавочкина*. 2017; (4(38)): 160—170.

Prilutskiy A.A., Sidorchuk E.A., Petrov A.S. Modeling of aperture mechanical deformation influence on array factor of space–based active phase ARRAY antenna. *Vestnik NPO im. S.A. Lavochkina*. 2017; (4(38)): 160—170. (In Russ.)

5. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. В 2–х т. Т. 1. Элементарная теория и задачи. М.: Физматгиз; 1965. 360 с.

Timoshenko S. Strength of materials. In 2 vol. Vol. 1. Elementary theory and problems.Princeton a. o., Van Nostrand; 1965. 360 p. (Russ. Transl.: Soprotivlenie materialov. In 2 vol. Vol. 1. Elementarnaya teoriya i zadachi. Moscow: Fizmatgiz; 1965. 360 p.)

6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. В 10 т. Т. 7. Упругости Ландау, Лифшиц М.: Физматлит; 2003. 264 с.

Landau L.D., Lifshitz E.M. Theory of elasticity. In 10 vol. Vol. 7. Elasticities Landau, Lifshitz Moscow: Fizmatlit; 2003. 264 p. (In Russ.)

7. Сидоров В.Н., Вершинин В.В. Метод конечных элементов в расчете сооружений: теория, алгоритм, примеры расчетов в программном комплексе SIMULIA Abaqus М.: АСВ; 2015. 288 с.

Sidorov V.N., Vershinin V.V. Finite element method in the calculation of structures: theory, algorithm, examples of calculations in the SIMULIA Abaqus software package. Moscow: ACB; 2015. 288 p. (In Russ.)

8. Золотарев А.А., Иванов К.А. Анализ деформации корпуса из металломатричного композита AlSiC при самонагреве мощного полевого транзистора с барьером Шоттки. *Электронная техника. Серия 2. Полупроводниковые приборы*. 2017; (2(245)): 39—47.

Zolotarev A.A., Ivanov K.A. Analysis of the deformation of a housing made of a metal–matrix AlSiC composite during self–heating of a high–power field–effect transistor with a Schottky barrier. *Elektronnaya tekhnika. Seriya 2. Poluprovodnikovye pribory*. 2017; (2(245)): 39—47. (In Russ.)

9. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Пер. с англ. М.: Мир; 1979. 392 с.

Segerlind L.J. Applied finite element analysis. New York etc., 1976. 392 p. (Russ. Transl.: Segerlind L.J. Primenenie metoda konechnykh elementov. Moscow: Mir; 1979. 392 p.)

10. Brandt A., McCormick S.F., Ruge J.W Algebraic multigrid (AMG) for sparse matrix equations. Cambridge; Cambridge University Press; 1984. 284 p.

11. De Sterck H., Yang U.M., Heys J.J. Reducing complexity in parallel algebraic multigrid preconditioners. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2006; 27(4): 1019—1039. https://doi.org/10.1137/040615729

12. De Sterck. H., Falgout R.D., Nolting J., Yang U.M. Distance–two interpolation for parallel algebraic multigrid, submitted to numerical linear algebra with application. Technical report UCRL–JRNL–230844. 10 May 2007; 2007. 24 p.

13. Henson V.E., Yang U.M. BoomerAMG: a parallel algebraic multigrid solver and preconditioner. *Applied Numerical Mathematics*. 2002; 41: 155—177.

14. Ruge J.W., Stueben K. Algebraic multigrid (AMG). In: *McCormick S.F. (ed.) Multigrid methods. Vol. 3. Frontiers in applied mathematics*. Philadelphia: SIAM; 1987. P. 73—130. https://doi.org/10.1137/1.9781611971057.ch4

15. Segal M., Akeley K. The OpenGLTM graphics system : A specification (Version 1.0). 1994. 163 p. https://www.cs.uaf.edu/2006/fall/cs381/ref/opengl_1.4.pdf

16. Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики. Пер. с англ. М.: Мир; 1989. 503 с.

Rogers D.F. Procedural elements for computer graphics. N.Y.: McGraw–Hill; 1985. 503 p. (Russ. Transl.: Rogers D.F. Algoritmicheskie osnovy mashinnoi grafiki. Moscow: Mir; 1989. 503 p.)

17. Demidov D. AMGCL: An efficient, flexible, and extensible algebraic multigrid implementation. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019; 40(5): 535—546. https://doi.org/10.1134/S1995080219050056

18. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. Чебышевские итерации с адаптивным уточнением нижней границы спектра матрицы. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН; 2018. 32 с.

Zhukov V.T., Novikova N.D., Feodoritova O.B. Chebyshev iterations with adaptive refinement of the lower bound of the matrix spectrum. Moscow: IPM im. M.V. Keldysha RAN; 2018. 32 p. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Иванов Кирилл Андреевич — инженер–электроник 1 категории, АО «НПП «Пульсар», Окружной проезд, д. 27, Москва, 105187, Российская Федерация; e–mail: ivanov_ka@pulsarnpp.ru

Kirill A. Ivanov — Electronics Engineer, 1st Category, JSC “S&PE “Pulsar”, 27 Okruzhnoy Passage, Moscow 105187, Russian Federation; e–mail: ivanov_ka@pulsarnpp.ru

Каевицер Екатерина Владиленовна — начальник лаборатории перспективных научных исследований, АО «НПП «Пульсар», Окружной проезд, д. 27, Москва, 105187, Российская Федерация; доцент кафедры физики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», Ленинский просп., д. 4, стр. 1, Москва, 119049, Российская Федерация; e–mail: kaevitser.ev@misis.ru

Ekaterina V. Kaevitser — Head of the Laboratory for Advanced Scientific Research, JSC “S&PE “Pulsar”, 27 Okruzhnoy Passage, Moscow 105187, Russian Federation; Associate Professor, Department of Physics, National University of Science and Technology “MISIS”, 4–1 Leninsky Ave., Moscow 119049, Russian Federation; e–mail: kaevitser.ev@misis.ru

Золотарев Алексей Алексеевич — доцент кафедры наноэлектроники, МИРЭА – Российский технологический университет, просп. Вернадского, д. 78, Москва, 119454, Российская Федерация; e–mail: zolotarev@mirea.ru

Alexey A. Zolotarev — Associate Professor of the Department of Nanoelectronics, MIREA – Russian Technological University, 78 Vernadsky Ave, Moscow 119454, Russian Federation; e–mail: zolotarev@mirea.ru

Поступила в редакцию 27.07.2023; поступила после доработки 10.08.2023; принята к публикации 06.09.2023
Received 27 July 2023; Revised 10 August 2023; Accepted 6 September 2023

* * *