

УДК 621.315:004.3:004.93

Имитационное моделирование аналоговой импульсной нейронной сети на основе мемристорного кроссбара с использованием параллельных вычислительных технологий

© 2022 г. А. Ю. Морозов¹, К. К. Абгарян¹✉, Д. Л. Ревизников¹

¹ *Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» Российской академии наук,
ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, Москва, 119333, Российская Федерация*

✉ Автор для переписки: kristal83@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена вопросам имитационного моделирования аналоговой импульсной нейронной сети на основе мемристивных элементов в рамках задачи распознавания образов. Имитационное моделирование позволяет выполнить настройку сети на уровне математической модели, и впоследствии использовать полученные параметры непосредственно в процессе функционирования. Модель сети задается в виде динамической системы, которая может состоять из десятков и сотен тысяч обыкновенных дифференциальных уравнений. Естественным образом возникает потребность в эффективной и параллельной реализации соответствующей имитационной модели. В качестве технологии для распараллеливания вычислений используется OpenMP (Open Multi-Processing), так как она позволяет достаточно легко создавать многопоточные приложения на различных языках программирования. Эффективность распараллеливания оценивается на задаче моделирования процесса обучения сети распознаванию набора из пяти изображений размера 128 на 128 пикселей, которая приводит к решению порядка 80 тысяч дифференциальных уравнений. На данной задаче получено более чем шестикратное ускорение вычислений.

Согласно экспериментальным данным, характер функционирования мемристоров является стохастическим, о чем свидетельствует разброс в вольт-амперных характеристиках в процессе переключения между высокоомным и низкоомным состояниями. Для учета этой особенности применяется модель мемристора с интервальными параметрами, которая дает ограничения сверху и снизу на интересующие величины, и включает экспериментальные кривые в коридоры. При моделировании работы всей аналоговой самообучающейся импульсной нейронной сети, каждую эпоху обучения параметры мемристоров задаются случайным образом из подобранных интервалов. Такой подход позволяет обойтись без применения стохастического математического аппарата, тем самым дополнительно уменьшив вычислительные затраты.

Ключевые слова: импульсная нейронная сеть, STDP, распознавание, мемристор, HfO_2 , LiNbO_3 , интервальная модель, ВАХ, параллельные вычисления, OpenMP

Благодарности: Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-29-03051 мк.

Для цитирования: Морозов А.Ю., Абгарян К.К., Ревизников Д.Л. Имитационное моделирование аналоговой импульсной нейронной сети на основе мемристорного кроссбара с использованием параллельных вычислительных технологий. *Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники.* 2022; 25(4): 288—297. <https://doi.org/10.17073/1609-3577-2022-4-288-297>

Simulation modeling of an analog impulse neural network based on a memristor crossbar using parallel computing technologies

A. Yu. Morozov¹, K. K. Abgaryan¹✉, D. L. Reviznikov¹

¹ *Federal Research Center “Computer Science and Control”
of the Russian Academy of Sciences,
44–2 Vavilova Str., Moscow 119333, Russian Federation*

✉ Corresponding author: kristal83@mail.ru

Abstract. The work is devoted to the issues of simulation modeling of an analog impulse neural network based on memristive elements within the framework of the problem of pattern recognition. Simulation modeling allows you to configure the network at the level of a mathematical model, and subsequently use the obtained parameters directly in the process of operation. The network model is given as a dynamic system, which can consist of tens and hundreds of thousands of ordinary differential equations. Naturally, there is a need for an efficient and parallel implementation of an appropriate simulation model. OpenMP (Open Multi-Processing) is used as a technology for parallelizing calculations, since it allows you to easily create multi-threaded applications in various programming languages. The efficiency of parallelization is evaluated on the problem of modeling the process of learning the network to recognize a set of five images of size 128 by 128 pixels, which leads to the solution of about 80 thousand differential equations. On this problem, more than a sixfold acceleration of calculations was obtained. According to experimental data, the character of memristor operation is stochastic, as evidenced by the spread in the current-voltage characteristics during switching between high-resistance and low-resistance states. To take this feature into account, a memristor model with interval parameters is used, which gives upper and lower limits on the quantities of interest, and encloses the experimental curves in corridors. When modeling the operation of the entire analog self-learning impulse neural network, each epoch of training, the parameters of the memristors are set randomly from the selected intervals. This approach makes it possible to do without the use of a stochastic mathematical apparatus, thereby further reducing computational costs.

Keywords: impulse neural network, STDP, recognition, memristor, HfO_2 , LiNbO_3 , interval model, CVC, parallel computing, OpenMP

Acknowledgments: This work was supported by RFBR grant no. 19–29–03051 mk.

For citation: Morozov A.Yu., Abgaryan K.K., Reviznikov D.L. Simulation modeling of an analog impulse neural network based on a memristor crossbar using parallel computing technologies. *Izvestiya vuzov. Materialy elektronnoi tekhniki = Materials of Electronics Engineering*. 2022; 25(4): 288–297. <https://doi.org/10.17073/1609-3577-2022-4-288-297>

Введение

Искусственные нейронные сети используются во многих областях современной жизни и позволяют решать актуальные и практически значимые задачи, которые зачастую не поддаются решению

с помощью классических подходов. Для ускорения работы нейросетевых алгоритмов ведутся разработки специальных процессоров, основанных на принципах действия человеческого мозга и представляющих собой аппаратную реализацию импульсных (спайковых) нейронных сетей [1].

Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на VI-й международной конференции «Математическое моделирование в материаловедении электронных компонентов», Москва, 24–26 октября 2022 г.

© 2022 National University of Science and Technology MISiS.

This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original author and source are credited.

Настоящая работа посвящена вопросам имитационного моделирования аналоговой импульсной нейронной сети на основе мемристивных элементов [2—4] в рамках задачи распознавания образов. Имитационное моделирование позволяет выполнить настройку сети на уровне математической модели, и впоследствии использовать полученные параметры непосредственно в процессе функционирования.

Ранее авторами настоящей работы была разработана математическая модель аналоговой импульсной нейронной сети основанной на мемристивных элементах [5, 6] с методом самообучения *Spike Timing Dependent Plasticity (STDP)* [7—9]. Каждый синапс представляет собой мемристор, который описывается с помощью дифференциального уравнения относительно переменной состояния, характеризующей уровень проводимости элемента.

Модель сети задается в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может состоять из десятков и сотен тысяч уравнений. Естественным образом возникает потребность в эффективной и параллельной реализации соответствующей имитационной модели. В качестве технологии для распараллеливания вычислений в работе предлагается использовать OpenMP (*Open Multi-Processing*) [10], так как она позволяет достаточно легко создавать многопоточные приложения на различных языках программирования. OpenMP — это набор директив компилятора, библиотечных процедур и переменных окружения, которые предназначены для программирования многопоточных приложений на многопроцессорных системах с общей памятью [11]. Эффективность распараллеливания оценивается на задаче моделирования процесса обучения сети распознаванию набора из пяти изображений размера 128 на 128 пикселей, которая приводит к решению порядка 80 тысяч дифференциальных уравнений.

Согласно экспериментальным данным, характер функционирования мемристоров является стохастическим, о чем свидетельствует разброс в вольт-амперных характеристиках в процессе переключения между высокоомным и низкоомным состояниями [12, 13]. Для учета разброса характеристик элементов в работах [14—16] рассмотрен подход, заключающийся в замене детерминированного дифференциального уравнения состояния мемристора на стохастическое дифференциальное уравнение путем введения слагаемого, моделирующего аддитивный (гауссовский) шум. В работе [17] предложен другой подход, в основе которого лежит интервальный математический аппарат: предлагается модель мемристора с интервальными параметрами, которая дает ограничения сверху и снизу на интересующие величины, и заключа-

ет экспериментальные кривые в коридоры. Для получения такой интервальной модели в [18] был разработан аппарат для интервальной параметрической идентификации динамических систем. При моделировании работы всей аналоговой самообучающейся импульсной нейронной сети, каждую эпоху обучения параметры мемристоров задаются случайным образом из подобранных интервалов. Результаты имитационного моделирования работы сети, полученные с использованием данных двух подходов к учету особенностей мемристоров, согласуются друг с другом, однако интервальный подход позволяет обойтись без применения стохастического математического аппарата (без численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений), тем самым дополнительно уменьшая вычислительные затраты.

Во втором разделе приводятся две модели мемристоров с интервальными параметрами соответствующие элементам на основе HfO_2 и LiNbO_3 . В третьем разделе представлена математическая модель аналоговой импульсной нейронной сети, основанной на мемристивных элементах с методом самообучения STDP, и описаны основные моменты параллельной её реализации. В четвертом разделе решается задача моделирования процесса обучения сети распознаванию набора из пяти изображений и приводится оценка полученного ускорения от распараллеливания. В заключении формулируются основные результаты работы.

Интервальные математические модели мемристоров

Характер функционирования мемристоров является стохастическим, что проявляется в виде разброса в вольт-амперных характеристиках в процессе переключения между высокоомным и низкоомным состояниями. Для учета этой осо-

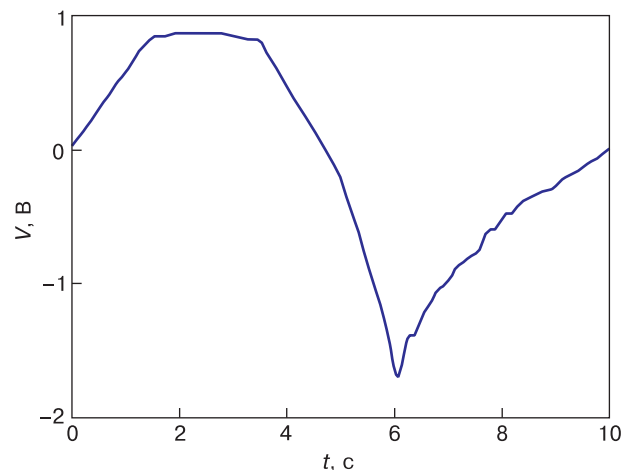


Рис. 1. Исходная зависимость напряжения от времени в эксперименте

Fig. 1. Initial dependence of voltage on time in the experiment

бенности применяются модели с интервальными параметрами, которые дают ограничения сверху и снизу на интересующие величины, и заключает экспериментальные кривые в коридоры.

Сначала рассматривается модификация модели мемристора, представленной в [19]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = aV(t)^s \begin{cases} 1 - (1 - x(t))^p, & V(t) \leq -V_{thr}, \\ 0, & -V_{thr} < V(t) \leq V_{thr}, \\ 1 - x(t)^p, & V > V_{thr}, \end{cases}$$

$$p = 2 \text{round} [b(|V(t) + c|^{-1})],$$

$$I(t) = x(t)^n \beta \sinh(\alpha_M V(t)) + \chi [\exp(\gamma V(t)) - 1] + \delta,$$

$$R(t) = \frac{V(t)}{I(t)},$$

где x — переменная состояния; $a \in [1,000, 1,119] \text{ В}^{-5}$ — постоянная, определяемая свойствами матери-

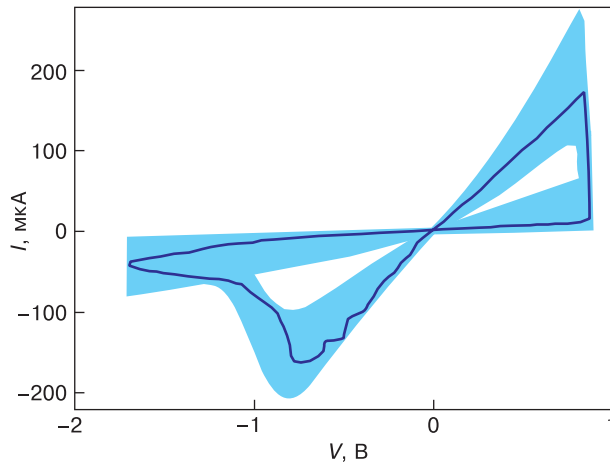


Рис. 2. Экспериментальная и модельная вольтамперные характеристики

Fig. 2. Experimental and model current-voltage characteristics

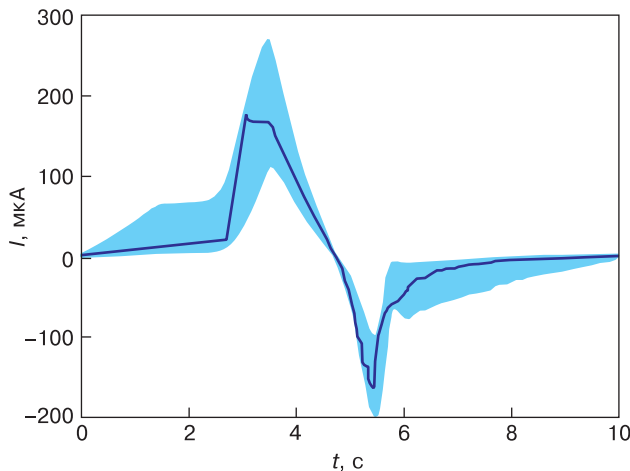


Рис. 3. Экспериментальная и модельная зависимости тока от времени

Fig. 3. Experimental and model dependences of the current on time

ала; $s = 5$ — нечетное целое число; $I(t)$, $V(t)$, $R(t)$ — текущие значения тока, напряжения и сопротивления; $V_{thr} = 0,4 \text{ В}$ — пороговое значение напряжения активации; $n = 9$, $\beta = 9 \cdot 10^{-5} \text{ В}$, $\chi = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ В}$, $a_M \in [1,674, 2,114] \text{ В}^{-1}$, $\gamma \in [-0,019, 0,415] \text{ В}^{-1}$, $\delta \in [-0,011, 1,464] \text{ мкА}$ — подгоночные параметры в выражении для тока; round — функция получения целочисленного результата; $b = 15 \text{ В}$, $c = 2 \text{ В}$ — подгоночные коэффициенты основного уравнения. Данные значения параметров получены с помощью подхода описанного в работе [18] для наилучшего воспроизведения экспериментальных данных по мемристору на основе оксида гафния [19]. На рис. 1 показана зависимость напряжения от времени $V(t)$, на рис. 2 черной кривой представлена экспериментальная вольтамперная характеристика (**ВАХ**) и на рис. 3 восстановленная по $V(t)$ и **ВАХ** зависимость тока от времени. Серым цветом показаны полученные модельные интервальные оценки.

Далее приведем модель, полученную в работе [17] для мемристора на основе LiNbO_3 .

Переменно-резисторная модель тонкопленочного мемристора, основанная на экспоненциальной модели дрейфа легирующей примеси [20] с ограничением по максимальному току описывается следующими уравнениями:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{cases} \mu_v \frac{V_p}{D^2} \exp\left(\frac{R_{on}}{V_p} I(t)\right), & V(t) \geq V_p, \\ \mu_v \frac{V_n}{D^2} \exp\left(\frac{R_{on}}{V_n} I(t)\right), & V(t) \leq V_n, \\ \mu_v \frac{R_{on}}{D^2} I(t), & V_n < V(t) < V_p, \end{cases}$$

$$R(t) = R_{on}x(t) + R_{off}(1 - x(t)),$$

$$I(t) = \min \left\{ I_{\max}, \max \left[-I_{\max}, \frac{V(t)}{R_{on}x(t) + R_{off}(1 - x(t))} + \left(1 + \frac{V(t)}{10} \right) \delta \right] \right\},$$

где x — переменная состояния; $I(t)$, $V(t)$, $R(t)$ — значения тока, напряжения и сопротивления в момент времени t ; R_{on} , R_{off} — минимальное и максимальное сопротивление мемристора; V_n , V_p — значения напряжений, при которых происходит переключение состояния; μ_v — коэффициент легирующей подвижности; D — толщина полупроводниковой пленки; $I_{\max}$ — максимальное значение тока; δ — параметр в виде слагаемого с весовым коэффициентом, зависящим от напряжения, вводимый в уравнение тока для расширения обобщающих способностей модели.

На рис. 4 показана экспериментальная зависимость тока от времени при определенной форме

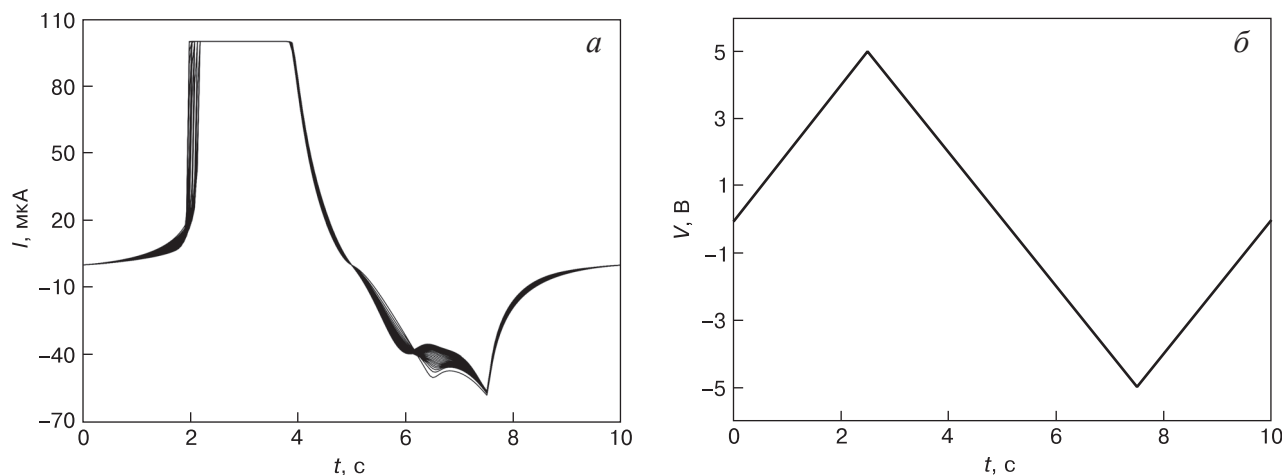


Рис. 4. Зависимости тока (а) и напряжения (б) от времени в эксперименте

Fig. 4. Dependences of current (a) and voltage (б) on time in the experiment

напряжения для мемристора на основе LiNbO_3 [21, 22]. Еще раз отметим, что типична ситуация, когда экспериментальные данные представляют

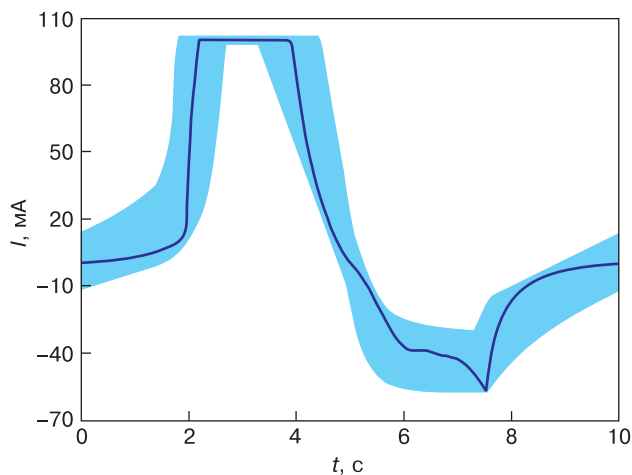


Рис. 5. Сравнение интервальной оценки зависимости тока от времени с экспериментальной кривой

Fig. 5. Comparison of the interval estimate of the dependence of the current on time with the experimental curve

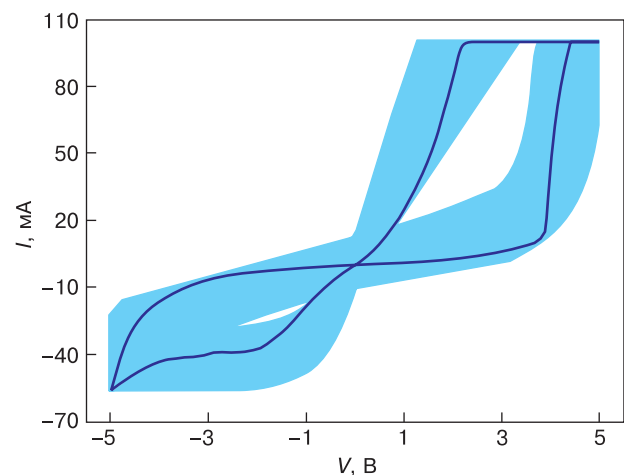


Рис. 6. Сравнение интервальной ВАХ с экспериментальной кривой

Fig. 6. Comparison of the interval current-voltage characteristic with the experimental curve

собой пучок траекторий, который соответствует разным циклам переключения мемристора.

При значениях параметров $I_{\max} = 100$ мА, $D = 4 \cdot 10^{-7}$ м, $R_{\text{on}} \in [14,46, 29,46]$ Ом, $R_{\text{off}} \in [209,6, 210,8]$ Ом, $V_n \in [-5,2, 4,66]$ В, $V_p \in [2,88, 3,04]$ В, $\mu_v \in [3,77 \cdot 10^{-14}, 5,03 \cdot 10^{-14}]$, $\delta \in [-0,01, 0,012]$ усредненная экспериментальная кривая полностью содержится в модельных интервальных оценках. На рис. 5 показана интервальная оценка зависимости тока от времени, а на рис. 6 — интервальная ВАХ.

Обе приведенные модели с интервальными параметрами дают интервальные оценки, которые полностью содержат в себе экспериментальные данные, что дополнительно подтверждает эффективность подхода к интервальной параметрической идентификации динамических систем, представленного в работе [18].

При дальнейшем моделировании работы нейронной сети, каждую эпоху обучения параметры мемристоров задаются случайным образом из соответствующих интервалов.

Математическая модель нейронной сети и особенности распараллеливания

Математическая модель аналоговой импульсной нейронной сети для распознавания n изображений размером $w \times h$ пикселей задается следующими соотношениями в соответствии с работой [5]:

$$\frac{dx_{i,j}}{dt} = \begin{cases} F_X(x_{i,j}, V_{\text{te}}^j - V_{\text{int}}^j), & V_g^i(t) > 0, \\ 0, & V_g^i(t) = 0, \end{cases}$$

$$\frac{d\tau_j}{dt} = 1 - \delta(V_{\text{int}}^j - V_{\text{th}})\tau_j,$$

$$\frac{dV_{\text{int}}^j}{dt} = \frac{1}{C_{\text{int}}} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\hat{V}_{\text{te}}^j - V_{\text{int}}^j}{R_{i,j}} - \frac{V_{\text{int}}^j}{R_{\text{int}}} \right] -$$

$$-\max_{i=1,m} [\theta(V_{\text{int}}^i - V_{\text{th}}) \hat{\alpha}_{i,j}] \delta \left(\prod_{i=1}^m (V_{\text{int}}^i - V_{\text{th}}) \right) V_{\text{int}}^j,$$

$$V_{\text{te}}^j = \begin{cases} V_{\text{te}}^+, & \tau_j \leq \tau_s, \\ V_{\text{te}}^-, & \frac{\tau_r}{2} < \tau_j \leq \frac{\tau_r}{2} + \tau_s, \\ V_{\text{te}}^0, & \tau_r < \tau_j, \\ 0, & \tau_s < \tau_j \leq \frac{\tau_r}{2} \vee \frac{\tau_r}{2} + \tau_s < \tau_j \leq \tau_r, \end{cases}$$

$$V_{\text{out}}^j = \begin{cases} V_{\text{out}}^+, & \tau_j \leq \tau_{\text{out}}, \\ 0, & \tau_{\text{out}} < \tau_j, \end{cases}$$

$$\hat{\alpha}_{i,j} = 1 - \alpha(1 - \delta_{ij}),$$

$$\hat{V}_{\text{te}}^j = \max[0, \min(V_{\text{te}}^j, V_{\text{te}}^0)],$$

$$x_{i,j}(0) = \text{random}[0, 1], \quad V_{\text{int}}^j(0) = 0,$$

$$\tau_j(0) > \max(\tau_r, \tau_{\text{out}}), \quad i = 1, \dots, w \times h, \quad j = 1, \dots, n,$$

где V_{g}^i — текущее значение напряжения на i -м входе нейронной сети; V_{te}^j — текущее значение напряжения в обратной связи j -го нейрона; V_{out}^j — текущее значение напряжения на выходе j -го нейрона; τ_j — время, прошедшее после последней активации j -го нейрона; V_{int}^j — напряжение на конденсаторе j -го нейрона; $R_{\text{int}}, C_{\text{int}}$ — значение сопротивления и емкости у нейронов; $V_{\text{te}}^+, V_{\text{te}}^0$ — значения амплитуды импульсов обратной связи и значение напряжения по умолчанию; V_{out}^+ — амплитуда выходного импульса; V_{th} — уровень напряжения активации нейрона; $R_{i,j}$ — значение сопротивления мемристора i -го синапса j -го нейрона; $x_{i,j}$ — состояние мемристора i -го синапса j -го нейрона; τ_r — длительность сигнала в обратной связи после активации нейрона; τ_s — длительность одного импульса в сигнале обратной связи, $2\tau_s < \tau_r$; τ_{out} — длительность одного импульса на выходе сети; α — коэффициент подавления; δ_{ij} — символ Кронекера; $\delta(x)$ — дельта-функция; $\theta(x)$ — функция Хэвисайда; зависимости F_X и $R_{i,j}$ определяются в соответствии с моделью мемристора.

Количество обыкновенных дифференциальных уравнений в приведенной выше системе

составляет $nwh + 2n$. При размерах распознаваемых изображений, отвечающим современным практическим задачам, количество уравнений будет исчисляться десятками и сотнями тысяч. Естественным образом возникает потребность в эффективной и параллельной реализации соответствующей имитационной модели.

Технология (или стандарт) OpenMP — представляет собой набор директив компилятора, библиотечных методов, а также переменных окружения, предназначенных для программирования многопоточных приложений на многопроцессорных системах с общей памятью (SMP-системах).

Технология OpenMP начинает свою историю с 1997 г. и за прошедшее время зарекомендовала себя как очень удобная технология для создания легко переносимых многопоточных приложений.

Как правило, для высоконагруженных программ справедливо утверждение, что 90 % времени работы приходится на 10 % программного кода, и эти 10 % являются циклами. В самом простом случае чтобы распараллелить цикл, итерации которого независимы, достаточно перед циклом написать всего одну строчку: `#pragma omp parallel for`, и после этого итерации будут выполняться на разных вычислительных ядрах. А если, например, в цикле еще происходит суммирование каких-то значений в общую переменную `sum`, то необходимо добавить директиву `reduction(+:sum)`. Это демонстрирует простоту и удобство данной технологии.

В процессе имитационного моделирования выполняется численное решение системы ОДУ, заключающееся в многократном вычислении правой части системы, что является наиболее трудозатратой операцией. Так как в рамках одного вычисления правой части уравнения являются независимыми, то здесь удобно применить технологию OpenMP для распараллеливания циклов, соответствующих индексам i и j в описании модели.

Результаты и их обсуждение

Рассматривается задача распознавания пяти изображений размером 128 на 128 пикселей, представленных на рис. 7 [23]. Общее количество диф-

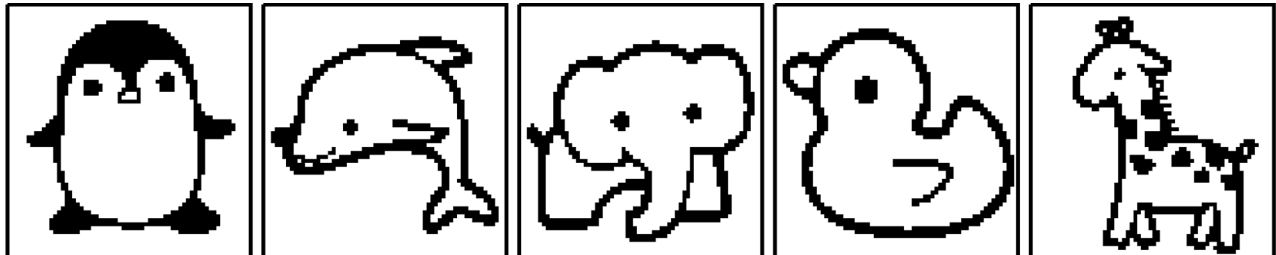


Рис. 7. Распознаваемые изображения

Fig. 7. Recognizable images

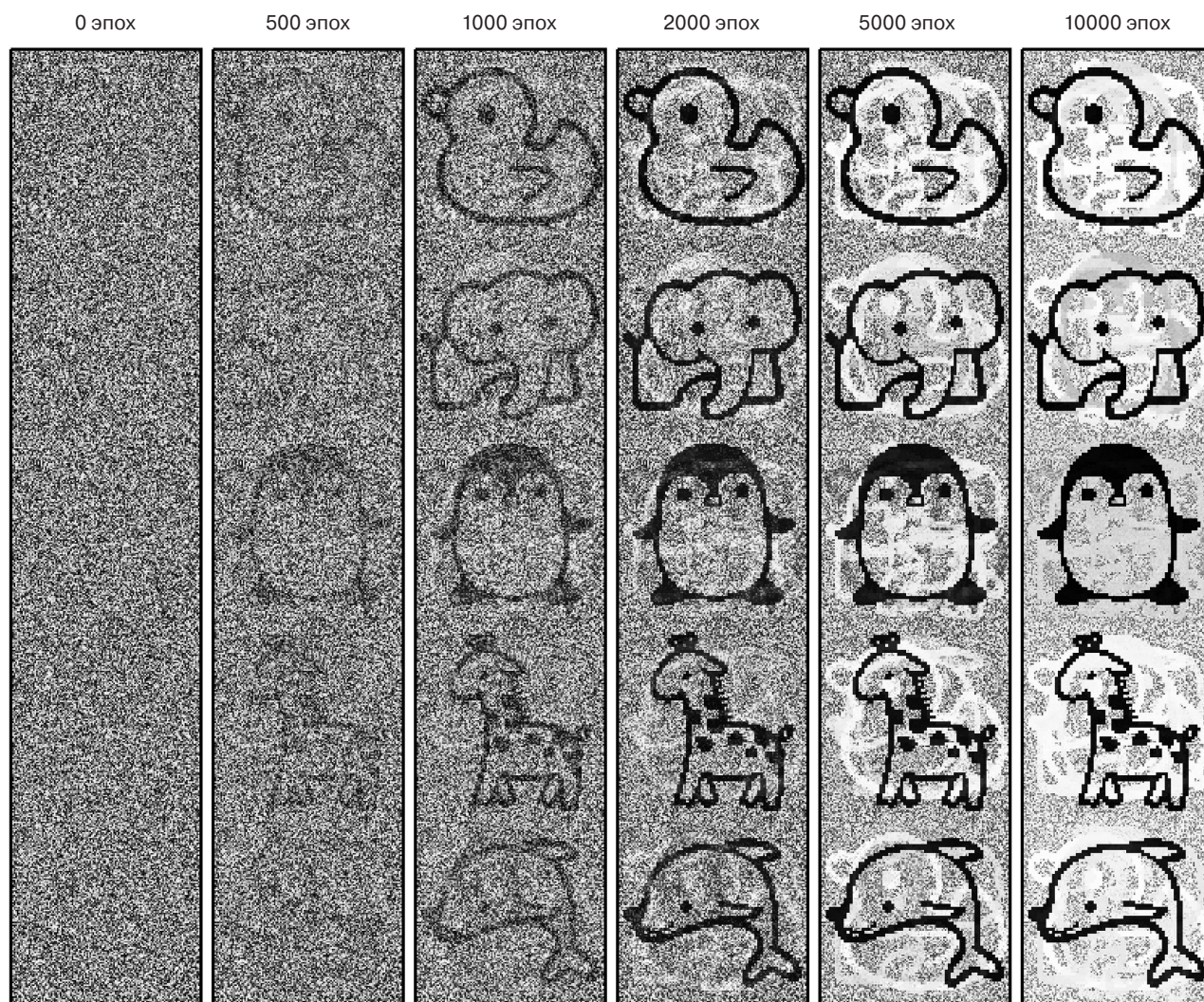


Рис. 8. Изменение состояний мемристоров в процессе обучения

Fig. 8. Changing the states of memristors during the learning process

ференциальных уравнений в модели составляет 81930 ($128 \times 128 \times 5 + 2 \times 5$). Вычисления производились на процессоре Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2620. В качестве модели мемристора использовалась модель, соответствующая LiNbO_3 .

В процессе имитационного моделирования подобраны следующие значения параметров модели: $R_{\text{int}} = 10,9 \text{ Ом}$, $C_{\text{int}} = 4,1 \text{ мФ}$, $V_{\text{te}}^+ = 1,55 \text{ В}$, $V_{\text{te}}^- = -1,6 \text{ В}$, $V_{\text{te}}^0 = 10 \text{ мВ}$, $V_{\text{out}}^+ = 2 \text{ В}$, $V_{\text{th}} = 2,5 \text{ мВ}$, $\tau_r = 15 \text{ мс}$, $\tau_s = 1 \text{ мс}$, $\tau_{\text{out}} = 1 \text{ мс}$, $a = 0,1$.

На рис. 8 показан процесс адаптации синаптических весов к распознаваемым образцам. Цвет соответствует значению переменной состояния соответствующего мемристора: чем темнее, тем проводимость больше; чем светлее, тем меньше.

Соответствие переменных состояний распознаваемым образцам говорит о том, что сеть успешно обучилась и запомнила заданные изображения.

На рис. 9 показана зависимость ускорения от количества вычислительных потоков ($S = T_1/T_p$, где T_1 — время работы последовательной версии реализации; T_p — время работы параллельной

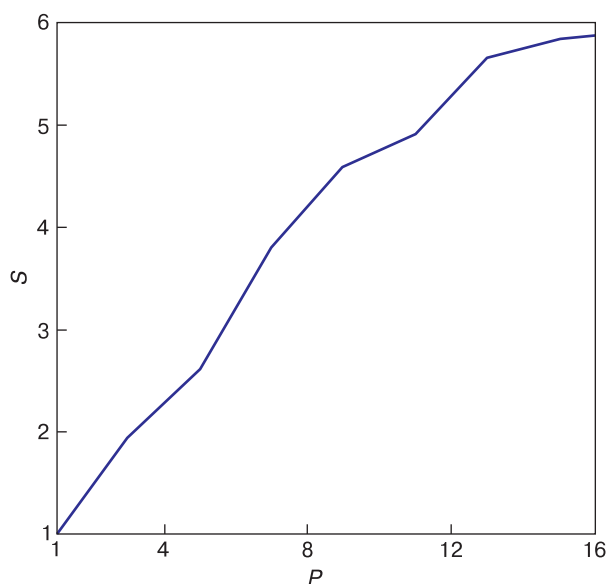


Рис. 9. Зависимость ускорения от количества вычислительных потоков

Fig. 9. Dependence of acceleration on the number of computational threads

версии реализации с использованием P вычислительных потоков). За счет распараллеливания удалось получить шестикратное ускорение вычислений.

Заключение

В работе рассмотрены вопросы эффективной параллельной реализации имитационной модели аналоговой импульсной нейронной сети на основе мемристивных элементов. Модель сети задается в виде динамической системы, которая может включать в себя десятки и сотни тысяч дифференциальных уравнений. Для эффективного учета

стохастических особенностей функционирования мемристоров использовались модели с интервальными параметрами. Распараллеливание выполняется с помощью технологии OpenMP на уровне вычисления правой части системы ОДУ в процессе численного интегрирования. Эффективность распараллеливания вычислений продемонстрирована на задаче моделирования процесса обучения сети распознаванию набора из пяти изображений размера 128 на 128 пикселей, которая приводит к решению порядка 80 тысяч дифференциальных уравнений. В результате получено более чем шестикратное ускорение вычислений.

Библиографический список

1. Merolla P.A., Arthur J.V., Alvarez-Icaza R., Cassidy A.S., Sawada J., Akopyan F., Jackson B.L., Imam N., Guo Ch., Nakamura Y., Brezzo B., Vo I., Esser S.K., Apuswamy R., Taba B., Amir A., Flickner M.D., Risk W.P., Manohar R., Modha D.S. Artificial brains. A million spiking-neuron integrated circuit with a scalable communication network and interface. *Science*. 2014; 345(6197): 668—673. <https://doi.org/10.1126/science.1254642>
2. Wong H.-S.P., Lee H.-Y., Yu Sh., Chen Y.-Sh., Wu Y., Chen P.-Sh., Lee B., Chen F.T., Tsai M.-J. Metal-oxide RRAM. *Proceedings of the IEEE*. 2012; 100(6): 1951—1970. <https://doi.org/10.1109/JPROC.2012.2190369>
3. Yang J.J., Strukov D.B., Stewart D.R. Memristive devices for computing. *Nature Nanotechnology*. 2013; 8(1): 13—24. <https://doi.org/10.1038/nnano.2012.240>
4. Li C., Hu M., Li Y., Ge N., Montgomery E., Zhang J., Song W., Dávila N., Graves C.E., Li Zh., Strachan J.P., Lin P., Wang Zh., Barnell M., Wu Q., Williams R.S., Yang J.J., Xia Q. Analogue signal and image processing with large memristor crossbars. *Nature Electronics*. 2018; 1: 52—59. <https://doi.org/10.1038/s41928-017-0002-z>
5. Morozov A.Yu., Abgaryan K.K., Reviznikov D.L. Mathematical model of a neuromorphic network based on memristive elements. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021; 143: 110548. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110548>
6. Морозов А.Ю., Абгарян К.К., Ревизников Д.Л. Математическое моделирование самообучающейся нейроморфной сети, основанной на наноразмерных мемристивных элементах с 1T1R-кроссбар-архитектурой. *Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники*. 2020; 23(3): 186—195. <https://doi.org/10.17073/1609-3577-2020-3-186-195>
7. Diehl P., Cook M. Unsupervised learning of digit recognition using spike-timing-dependent plasticity. *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2015; 9: 99. <https://doi.org/10.3389/fncom.2015.00099>
8. Ambrogio S., Balatti S., Milo V., Carboni R., Wang Zh., Calderoni A., Ramaswamy N., Ielmini D. Neuromorphic learning and recognition with one-transistor-one-resistor synapses and bistable metal oxide RRAM. *IEEE Transactions on Electron Devices*. 2016; 63(4): 1508—1515. <https://doi.org/10.1109/TED.2016.2526647>
9. Guo Y., Wu H., Gao B., Qian H. Unsupervised learning on resistive memory array based spiking neural networks. *Frontiers in Neuroscience*. 2019; 13: 812. <https://doi.org/10.3389/fnins.2019.00812>
10. OpenMP. <https://www.openmp.org/> (дата обращения: 02.04.2021).
11. PVS-Studio is a static analyzer on guard of code quality, security (SAST), and code safety. URL: <https://pvs-studio.com/ru/a/0057/> (дата обращения 02.04.2021).
12. Rodríguez-Fernández A., Cagli C., Perniola L., Miranda E., Suñé J. Characterization of HfO₂-based devices with indication of second order memristor effects. *Microelectronic Engineering*. 2018; 195: 101—106. <https://doi.org/10.1016/j.mee.2018.04.006>
13. Теплов Г.С., Горнев Е.С. Модель на языке Verilog—А многоуровневого биполярного мемристора с учетом девиаций параметров переключения. *Микроэлектроника*. 2019; 48(3): 163—175. <https://doi.org/10.1134/S0544126919030104>
14. Васильев А., Чернов П.С. Математическое моделирование мемристора в присутствии шума. *Математическое моделирование*. 2014; 26(1): 122—132.
15. Morozov A.Yu., Abgaryan K.K., Reviznikov D.L. Simulation of the neuromorphic network operation taking into account stochastic effects. In: *Short paper proceed. of the VI Inter. conf. on information technologies and high-performance computing (ITHPC 2021). Khabarovsk, 14–16 September 2021*. CEUR Workshop Proceedings; 2021. P. 84—91.
16. Морозов А.Ю., Абгарян К.К., Ревизников Д.Л. Математическое моделирование аналоговой самообучающейся нейронной сети на основе мемристивных элементов с учетом стохастической динамики переключения. *Российские нанотехнологии*. 2021; 16(6): 76—86. <https://doi.org/10.1134/S1992722321060157>
17. Morozov A.Yu., Abgaryan K.K., Reviznikov D.L. Interval model of a memristor crossbar network. *Physica Status Solidi (B)*. 2022; 259(11): 2200150. <https://doi.org/10.1002/pssb.202200150>
18. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Интервальный подход к решению задач параметрической идентификации динамических систем. *Дифференциальные уравнения*. 2022; 58(7): 962—976. <https://doi.org/10.31857/S0374064122070081>
19. Mladenov V. Analysis of memory matrices with HfO₂ memristors in a PSpice environment. *Electronics*. 2019; 8(4): 383. <https://doi.org/10.3390/electronics8040383>
20. Zheng G., Mohanty S.P., Kougianos E., Okobiah O. Polynomial metamodel integrated Verilog—AMS for memristor-based mixed-signal system design. *Proceed. IEEE*

56th Inter. midwest symposium on circuits and systems (MWSCAS). Columbus, OH, 04 August 2013. Demand Purchase at Partner; 2013. P. 916—919. <https://doi.org/10.1109/MWSCAS.2013.6674799>

21. Martyshev M.N., Emelyanov A.V., Demin V.A., Nikiruy K.E., Minnekhanov A.A., Nikolaev S.N., Taldenkov A.N., Ovcharov A.V., Presnyakov M.Yu., Sitnikov A.V., Vasiliev A.L., Forsh P.A., Granovsky A.B., Kashkarov P.K., Kovalchuk M.V., Rylkov V.V. Multifilamentary character of anticorrelated capacitive and resistive switching in memristive structures based on $(\text{Co-Fe-B})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$ nanocomposite. *Physical Review Applied*. 2020; 14(3): 034016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.14.034016>

22. Rylkov V., Nikolaev S., Demin V., Emelyanov A.V., Nikiruy K.E., Levanov V.A., Presnyakov M.Y., Taldenkov A.N., Vasiliev A.L., Chernoglazov K.Y., Tugushev V.V., Sitnikov A.V., Kalinin Y.E., Bugaev A.S., Granovsky A.B., Vedenev A.S. Transport, magnetic, and memristive properties of a nanogranular $(\text{CoFeB})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$ composite material. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2018; 126(3): 353—367. <https://doi.org/10.1134/S1063776118020152>

23. Фотохостинг Pinterest. <https://ru.pinterest.com/pin/351912463120005/> (дата обращения: 02.09.2022).

References

1. Merolla P.A., Arthur J.V., Alvarez-Icaza R., Cassidy A.S., Sawada J., Akopyan F., Jackson B.L., Imam N., Guo Ch., Nakamura Y., Brezzo B., Vo I., Esser S.K., Apuswamy R., Taba B., Amir A., Flickner M.D., Risk W.P., Manohar R., Modha D.H. Artificial brains. A million spiking-neuron integrated circuit with a scalable communication network and interface. *Science*. 2014; 345(6197): 668—673. <https://doi.org/10.1126/science.1254642>

2. Wong H.-S.P., Lee H.-Y., Yu Sh., Chen Y.-Sh., Wu Y., Chen P.-Sh., Lee B., Chen F.T., Tsai M.-J. Metal-oxide RRAM. *Proceedings of the IEEE*. 2012; 100(6): 1951—1970. <https://doi.org/10.1109/JPROC.2012.2190369>

3. Yang J.J., Strukov D.B., Stewart D.R. Memristive devices for computing. *Nature Nanotechnology*. 2013; 8(1): 13—24. <https://doi.org/10.1038/nnano.2012.240>

4. Li C., Hu M., Li Y., Ge N., Montgomery E., Zhang J., Song W., Dávila N., Graves C.E., Li Zh., Strachan J.P., Lin P., Wang Zh., Barnell M., Wu Q., Williams R.S., Yang J.J., Xia Q. Analogue signal and image processing with large memristor crossbars. *Nature Electronics*. 2018; 1: 52—59. <https://doi.org/10.1038/s41928-017-0002-z>

5. Morozov A.Yu., Abgaryan K.K., Reviznikov D.L. Mathematical model of a neuromorphic network based on memristive elements. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2021; 143: 110548. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110548>

6. Morozov A.Yu., Abgaryan K.K., Reviznikov D.L. Mathematical modeling of a self-learning neuromorphic network based on nanosized memristive elements with 1T1R crossbar architecture. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Materialy Elektronnoi Tekhniki = Materials of Electronics Engineering*. 2020; 23(3): 186—195. (In Russ.). <https://doi.org/10.17073/1609-3577-2020-3-186-195>

7. Diehl P., Cook M. Unsupervised learning of digit recognition using spike-timing-dependent plasticity. *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2015; 9: 99. <https://doi.org/10.3389/fncom.2015.00099>

8. Ambrogio S., Balatti S., Milo V., Carboni R., Wang Zh., Calderoni A., Ramaswamy N., Ielmini D. Neuromorphic learning and recognition with one-transistor-one-resistor synapses and bistable metal oxide RRAM. *IEEE Transactions on Electron Devices*. 2016; 63(4): 1508—1515. <https://doi.org/10.1109/TED.2016.2526647>

9. Guo Y., Wu H., Gao B., Qian H. Unsupervised learning on resistive memory array based spiking neural networks. *Frontiers in Neuroscience*. 2019; 13: 812. <https://doi.org/10.3389/fnins.2019.00812>

10. OpenMP. <https://www.openmp.org/> (accessed on 02.04.2021).

11. PVS-Studio is a static analyzer on guard of code quality, security (SAST), and code safety. <https://pvs-studio.com/ru/a/0057/> (accessed on 02.04.2021).

12. Rodriguez-Fernandez A., Cagli C., Perniola L., Miranda E., Suñé J. Characterization of HfO₂-based devices with indication of second order memristor effects. *Microelectronic Engineering*. 2018; 195: 101—106. <https://doi.org/10.1016/j.mee.2018.04.006>

13. Teplov G.S., Gornev E.S. Multilevel bipolar memristor model considering deviations of switching parameters in the Verilog-A language. *Russian Microelectronics*. 2019; 48(3): 131—142. (In Russ.). <https://doi.org/10.1134/S0544126919030104>

14. Vasil'ev V.A., Chernov P.S. Mathematical modeling of memristor in the presence of noise. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014; 26(1): 122—132. (In Russ.)

15. Morozov A.Yu., Abgaryan K.K., Reviznikov D.L. Simulation of the neuromorphic network operation taking into account stochastic effects. In: *Short paper proceed. of the VI Inter. conf. on information technologies and high-performance computing (ITHPC 2021)*. Khabarovsk, September 14—16, 2021. CEUR Workshop Proceedings; 2021. P. 84—91.

16. Morozov A.Y., Abgaryan K.K., Reviznikov D.L. Mathematical modeling of an analogue self-learning neural network based on memristive elements taking into account stochastic switching dynamics. *Nanobiotechnology Reports*. 2021; 16(6): 767—776. (In Russ.). <https://doi.org/10.1134/S1992722321060157>

17. Morozov A.Yu., Abgaryan K.K., Reviznikov D.L. Interval model of a memristor crossbar network. *Physica Status Solidi (B)*. 2022; 259(11): 2200150. <https://doi.org/10.1002/pssb.202200150>

18. Morozov A.Yu., Reviznikov D.L. Interval approach to solving problems of parametric identification of dynamical systems. *Differential Equations*. 2022; 58(7): 962—976. (In Russ.). <https://doi.org/10.31857/S0374064122070081>

19. Mladenov V. Analysis of memory matrices with HfO₂ memristors in a PSpice environment. *Electronics*. 2019; 8(4): 383. <https://doi.org/10.3390/electronics8040383>

20. Zheng G., Mohanty S.P., Kougianos E., Okobiah O. Polynomial metamodel integrated Verilog-AMS for memristor-based mixed-signal system design. *Proceed. IEEE 56th Inter. midwest symposium on circuits and systems (MWSCAS)*. Columbus, OH, August 04, 2013. Demand Purchase at Partner; 2013. P. 916—919. <https://doi.org/10.1109/MWSCAS.2013.6674799>

21. Martyshev M.N., Emelyanov A.V., Demin V.A., Nikiruy K.E., Minnekhanov A.A., Nikolaev S.N., Taldenkov A.N., Ovcharov A.V., Presnyakov M.Yu., Sitnikov A.V., Vasiliev A.L., Forsh P.A., Granovsky A.B., Kashkarov P.K., Kovalchuk M.V., Rylkov V.V. Multifilamentary character of anticorrelated capacitive and resistive switching in memristive structures based on $(\text{Co-Fe-B})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$ nanocomposite. *Physical Review Applied*. 2020; 14(3): 034016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.14.034016>

22. Rylkov V., Nikolaev S., Demin V., Emelyanov A.V., Nikiruy K.E., Levanov V.A., Presnyakov M.Y., Talden-

kov A.N., Vasiliev A.L., Chernoglazov K.Y., Tugushev V.V., Sitnikov A.V., Kalinin Y.E., Bugaev A.S., Granovsky A.B., Vedeneev A.S. Transport, magnetic, and memristive properties of a nanogranular $(\text{CoFeB})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$ composite material. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2018; 126(3): 353—367. <https://doi.org/10.1134/S1063776118020152>

23. Photo hosting Pinterest. (In Russ.). <https://ru.pinterest.com/pin/351912463120005/> (accessed on 02.09.2022).

Информация об авторах / Information about the authors

Морозов Александр Юрьевич — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, Москва, 119333, Российская Федерация; <https://orcid.org/0000-0003-0364-8665>; e-mail: morozov@infway.ru

Alexander Yu. Morozov — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Researcher; Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44–2 Vavilova Str., Moscow 119333, Russian Federation; <https://orcid.org/0000-0003-0364-8665>; e-mail: morozov@infway.ru

Абгарян Каринэ Карленовна — доктор физ.-мат. наук, главный научный сотрудник, руководитель отдела; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, Москва, 119333, Российская Федерация; <https://orcid.org/0000-0002-0059-0712>; e-mail: kristal83@mail.ru

Karine K. Abgaryan — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Researcher, Head of Department; Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44–2 Vavilova Str., Moscow 119333, Russian Federation; <https://orcid.org/0000-0002-0059-0712>; e-mail: kristal83@mail.ru

Ревизников Дмитрий Леонидович — доктор физ.-мат. наук, профессор, ведущий научный сотрудник; Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, Москва, 119333, Российская Федерация; <https://orcid.org/0000-0003-0998-7975>; e-mail: reviznikov@gmail.com

Dmitry L. Reviznikov — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Leading Researcher; Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44–2 Vavilova Str., Moscow 119333, Russian Federation; <https://orcid.org/0000-0003-0998-7975>; e-mail: reviznikov@gmail.com

Поступила в редакцию 29.11.2022; поступила после доработки 13.12.2022; принята к публикации 19.12.2022

Received 29 November 2022; Revised 13 December 2022; Accepted 19 December 2022