

**ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ /
PHYSICAL CHARACTERISTICS AND THEIR STUDY**

Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники. 2024. Т. 27, № 2. С. 154—164.

DOI: 10.17073/1609-3577j.met202312.570

УДК 621.315:538.945

**Моделирование квантовой динамики
фрустрированных сетей джозефсоновских контактов**

© 2024 г. П. С. Бурцев, Р. А. Мигдисов✉, Н. А. Малеева, М. В. Фистуль

*Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»,
Ленинский просп., д. 4, стр. 1, Москва, 119049, Российская Федерация*

✉ Автор для переписки: m1910570@edu.misis.ru

Аннотация. Теоретически исследована макроскопическая квантовая динамика в фрустрированных сетях взаимодействующих джозефсоновских контактов (Ф–СДК). Рассмотрено два типа Ф–СДК: квазиодномерная пилообразная цепочка и двумерная кагомэ решетка малых (квантовых) джозефсоновских контактов. Фрустрация в системе вводится с помощью периодически расположенных 0– и π –джозефсоновских контактов. В фрустрированном режиме спонтанные вихревые токи двух противоположных направлений протекают в каждом базовом элементе Ф–СДК, состоящего из трех сверхпроводящих островов, соединенных джозефсоновскими контактами. Коллективная квантовая динамика вихревых токов описывается эффективным гамильтонианом взаимодействующих спинов, в котором были учтены и квантовая суперпозиция вихревых токов в отдельном базовом элементе и дальнodelствующее взаимодействие между вихревыми токами. Обсуждаются два типа взаимодействия: зарядовое взаимодействие между сверхпроводящими островами в пилообразных цепочках и топологические ограничения в решетке кагомэ. Показано, что дальнodelствующее взаимодействие спинов в этих Ф–СДК позволяет реализовать различные коллективные квантовые фазы с большой квантовой запутанностью. Предполагается, что Ф–СДК могут стать перспективной платформой для моделирования сложных сильно коррелированных электронных твердотельных, молекулярных и биологических систем, а также магнитных систем с фрустрацией.

Ключевые слова: джозефсоновские контакты, фрустрированные сверхпроводящие сети, решетка кагомэ, потоковый кубит, квантовая запутанность

Благодарности: Авторы выражают благодарность А.В. Устинову.

Финансирование: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21–72–30026, <https://rscf.ru/en/project/21-72-30026/>).

Для цитирования: Бурцев П.С., Мигдисов Р.А., Малеева Н.А., Фистуль М.В. Моделирование квантовой динамики фрустрированных сетей джозефсоновских контактов. *Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники.* 2024; 27(2): 154—164. <https://doi.org/10.17073/1609-3577j.met202312.570>

Modeling of the quantum dynamics of frustrated networks of Josephson junctions

P. S. Burtsev, R. A. Migdisov✉, N. A. Maleeva, M. V. Fistul

*National University of Science and Technology “MISIS”,
4–1 Leninsky Ave., Moscow 119049, Russian Federation*

✉ Corresponding author: m1910570@edu.misis.ru

Abstract. We report a theoretical study of the macroscopic quantum dynamics in frustrated networks of interacting Josephson junctions (f–NJJs). We consider two exemplary types of f–NJJs: quasi–1D sawtooth arrays and 2D Kagome lattice of small (quantum) Josephson junctions. The frustration is provided by periodically arranged 0– and π –Josephson junctions. In the frustration regime the clockwise (anticlockwise) persistent currents penetrate each basic cell, i.e., three superconducting islands connected by Josephson junctions. Collective quantum dynamics of persistent currents is described by the effective interacting spins Hamiltonian where we take into account the quantum superposition of persistent currents in a single cell induced by the macroscopic quantum tunneling of Josephson phases and a long–range interaction between persistent currents. Two types of interaction are discussed: charge interaction between superconducting islands in sawtooth arrays and topological constraints in Kagome lattice. We demonstrate that the long–interaction between spins in these f–NJJs allows one to realize the various collective quantum phases with a large quantum entanglement. We anticipate that f–NJJs can be a perspective platform for modeling complex strongly correlated electronic solid state, molecular, and biological systems, as well as frustrated magnetic systems.

Keywords: Josephson junctions, frustrated superconducting networks, Kagome lattice, flux qubit, quantum entanglement

Acknowledgment: The authors would like to thank A. V. Ustinov.

Funding: This research was financially supported by the Russian Science Foundation (project No. 21–72–30026, <https://rscf.ru/en/project/21-72-30026/>).

For citation: Burtsev P.S., Migdisov R.A., Maleeva N.A., Fistul M.V. Modeling of the quantum dynamics of frustrated networks of Josephson junctions. *Izvestiya vuzov. Materialy elektronnoi tekhniki* = *Materials of Electronics Engineering*. 2024; 27(2): 154–164. <https://doi.org/10.17073/1609-3577j.met202312.570>

Введение

Развитие сверхпроводниковых технологий привело к возможности создания разнообразных сетей джозефсоновских контактов (СДК) [1–3]. Такие сети состоят из большого числа периодически расположенных сверхпроводящих островков соединенных джозефсоновскими контактами [1, 4, 5]. Одно– или двумерные СДК уже много лет используются для создания различных высокоточных приборов, например, стандарта вольта, магнитных переключателей, быстрой сверхпроводниковой логики на одиночных флаксонах и т. д. [6, 7]

В связи с развитием исследований в области квантовой информации интерес научного сообщества переключился сейчас на теоретическое и экспериментальное исследования динамики СДК, работающих в макроскопическом квантовом режиме [8, 9]. Этот интерес прежде всего связан с

созданием универсального квантового компьютера, построенного на взаимодействующих сверхпроводниковых кубитах, который позволит решать самые общие задачи науки и техники [10]. Разработка разных типов и моделей сверхпроводниковых кубитов [11–14], например, потоковых кубитов, трансмонов, или зарядовых кубитов, соединительных и считывающих элементов, блоков, передающих состояния, и т. д., позволяет реализовать экспериментально самые разнообразные квантовые СДК [15–18]. Кроме универсального квантового компьютера даже небольшие СДК могут быть использованы для квантового аналогового моделирования сложных сильно коррелированных электронных твердотельных, молекулярных и биологических систем. Главная идея такого моделирования заключается в описании квантовой динамики СДК с помощью эффективного гамильтониана взаимодействующих спинов [15, 16, 19]. Следовательно,

экспериментально найденные когерентные квантовые состояния в таких СДК могут быть применимы к реальным, например, магнитным системам, чьи свойства также описываются спиновыми гамильтонианами со взаимодействием [20—22]. С помощью специально созданных квантовых СДК уже были проведены экспериментальные исследования таких фундаментальных физических явлений как переход Березинского—Костерлица—Таулеса [15], квантовая динамика в спиновых стеклах [16], многочастичная локализация [18], краевые моды Майорана [23], фрустрированные сети взаимодействующих кубитов [17, 24, 25].

С другой стороны, одним из важных направлений в исследовании магнитных систем является изучение фрустрированных магнетиков, в которых фрустрация возникает либо в результате конкуренции ферромагнитных и антиферромагнитных взаимодействий между локализованными магнитными моментами (спинами) — магнитная фрустрация [20, 26], либо в следствие особой геометрии расположения локализованных магнитных моментов (геометрическая фрустрация) [20—22, 27—30]. Фрустрация в магнитных системах приводит к сильно вырожденному классическому основному состоянию, большому количеству низколежащих метастабильных состояний и длительному времени релаксации при низких температурах [21, 22, 31]. Предполагается, что наличие фрустрации может

приводить к образованию спиновых жидкостей [22], в которых составляющие спины сильно коррелированы, однако дальний порядок отсутствует [20—22]. Спиновые жидкости демонстрируют замечательные коллективные явления, такие как возникающие калибровочные поля, дробные возбуждения частиц, квантовую запутанность и др.

Именно поэтому следующим естественным шагом в области исследований квантовых СДК было бы детальное изучение физики фрустрированных сетей джозефсоновских переходов (**ф-СДК**) и, в частности, идентификация коллективных квантовых фаз, которые возникают в этом случае. Хотя классическая нелинейная динамика ф-СДК в прошлом подробно изучалась [4, 32—35], квантовому режиму уделялось гораздо меньше внимания, см., например, [24, 36, 37].

В статье представлен подробный анализ квантового моделирования для специальных низкоразмерных (квазиодномерных и двумерных) ф-СДК, а именно пилообразной цепочки и решетки кагомэ. Отличительная особенность таких ф-СДК состоит в том, что соседние треугольные ячейки соединены общим сверхпроводниковым островком, но не имеют общих джозефсоновских контактов. Типичные ф-СДК представлены на рис. 1. В таких системах фрустрацию удобно вводить с помощью метода, предложенного в работах [33, 34], через периодическое расположение 0- и π -джозефсоновских

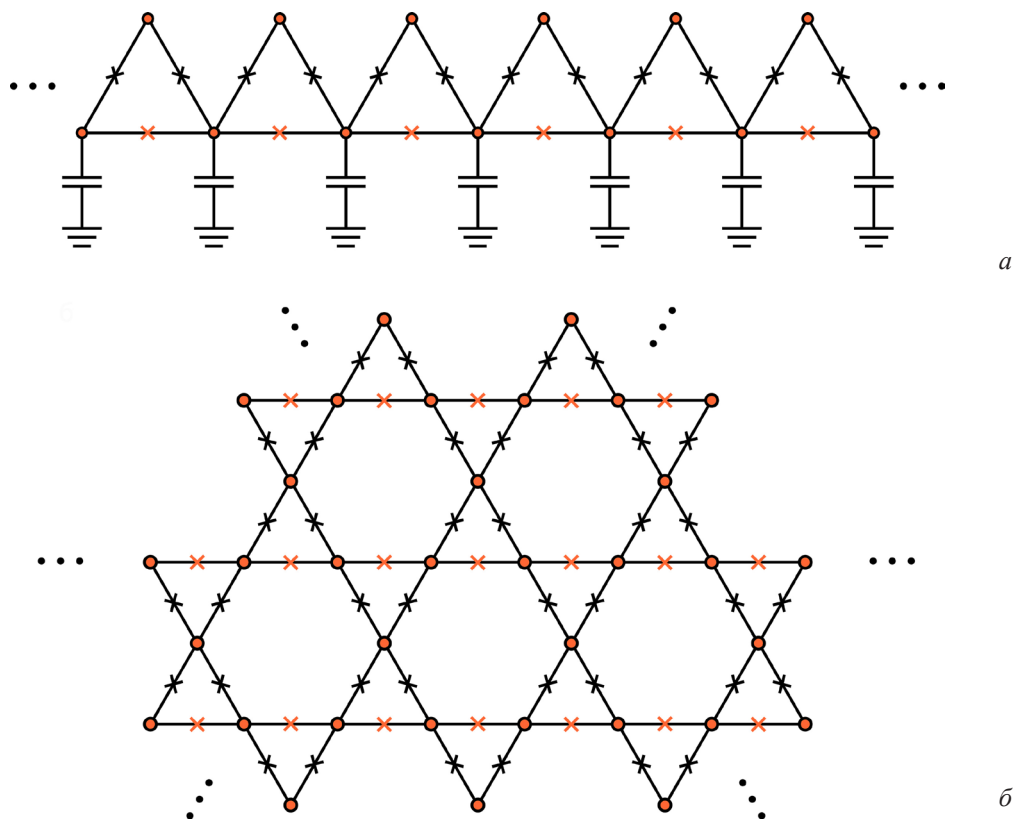


Рис. 1. Два типа фрустрированных сетей джозефсоновских контактов (ф-СДК): одномерная пилообразная цепочка (а); двумерная структура кагомэ (б)

Fig. 1. Two types of the frustrated networks of Josephson junctions (f-NJJs): 1D sawtooth (a) and 2D kagome lattice (b)

переходов, а параметр фрустрации, $0 \leq f \leq 1$, определяется как $f = (1 - \alpha)/2$, где параметр α ($-1 \leq \alpha \leq 1$) — отношение джозефсоновских энергий π - и 0-джозефсоновских контактов. Экспериментальные реализации таких ф-СДК требуют π -джозефсоновских переходов, которые могут быть изготовлены на основе переходов сверхпроводник — ферромагнетик — сверхпроводник [5] или различных многоконтактных СКВИДОВ во внешнем магнитном поле [12, 38].

В классическом пределе [33], когда все квантовые эффекты уменьшаются, при $f = f_{cr}$ происходит переход между нефрустрированным ($0 < f < f_{cr}$) и фрустрированным ($f_{cr} < f < 1$) режимами. В нефрустрированном режиме основное состояние уникально, все джозефсоновские фазы равны нулю. Напротив, основное состояние в фрустрированном режиме макроскопически вырождено, и джозефсоновские фазы могут принимать два разных набора значений в каждой ячейке СДК, соответствующих вихревым незатухающим токам разных направлений.

При низких температурах макроскопическое квантовое туннелирование приводит к суперпозиции незатухающих токов разных направлений, а взаимодействие между токами, протекающими

в разных ячейках, может приводить к сложным запутанным квантовым коллективным состояниям. Мы рассмотрим два типа взаимодействий: учет емкости сверхпроводниковых островков, который приводит к дальнедействующему зарядовому взаимодействию между джозефсоновскими контактами, легко реализуемому в пилообразных СДК (рис. 1, а) [39, 40]; наличие топологических дополнительных условий, связанных с квантованием джозефсоновских фаз в замкнутых сверхпроводниковых петлях в СДК (рис. 1, б) [19, 34].

Моделирование базового элемента квантовых фрустрированных СДК

Рассмотрим квантовое моделирование базового элемента фрустрированных СДК, т. е. замкнутого контура, состоящего из трех сверхпроводящих островков, попарно соединенных джозефсоновскими контактами [12]. Базовый элемент ф-СДК показан на рис. 2.

Для моделирования фрустрации мы рассмотрим базовый элемент, состоящий из двух 0-джозефсоновских контактов с джозефсоновской энергией E_J и одного π -джозефсоновского контакта — αE_J . Параметр α может принимать значения в интервале: $-1 < \alpha < 1$.

Классическая динамика базового элемента ф-СДК характеризуется зависящими от времени фазами сверхпроводящего параметра порядка сверхпроводящих островков, $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$ и $\chi_3(t)$, и соответствующих джозефсоновских фаз: $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и $\varphi_3(t)$. Используя условие квантования магнитного потока в замкнутом сверхпроводящем контуре (далее данное свойство упоминается, как *первое топологическое условие*) джозефсоновская фаза третьего джозефсоновского контакта записывается как $\varphi_3 = (\varphi_1 + \varphi_2)$.

Потенциальная энергия базового элемента ф-СДК в отсутствие внешнего тока выражается

следующим образом: $E_p = \sum_{i=1}^3 E_{Ji} (1 - \cos \varphi_i)$ [41].

С учетом первого топологического условия и замены переменных

$$u = \varphi_1 + \varphi_2, v = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (1)$$

потенциальная энергия E_p записывается как

$$\frac{E_p}{E_J} = 2 + \alpha - 2 \cos \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2} - \alpha \cos u. \quad (2)$$

Заметим, что точно такое же выражение для потенциальной энергии было получено для одиночного потокового кубита в присутствии внешнего магнитного потока $\Phi = \Phi_0/2$, где Φ_0 — квант потока [12].

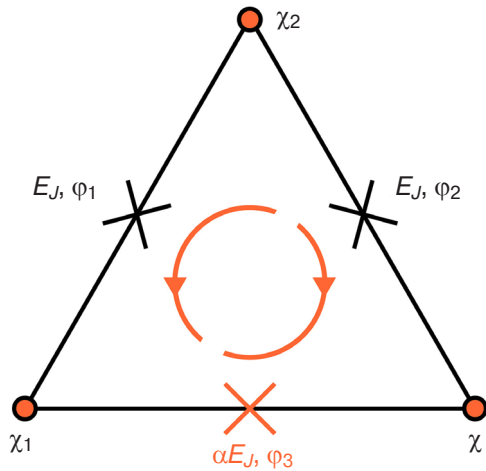


Рис. 2. Электрическая схема базового элемента ф-СДК. Показаны фазы параметра порядка сверхпроводящих островков, χ_1 , χ_2 и χ_3 , и разности фаз джозефсоновских контактов: φ_1 , φ_2 и φ_3 . Энергии двух джозефсоновских контактов 1 и 2 (0-джозефсоновские контакты) — E_J , третий джозефсоновский контакт (π -джозефсоновский контакт, обозначен оранжевым крестом) имеет энергию αE_J . В фрустрированном режиме классическое основное состояние двукратно вырождено. Стрелками обозначены спонтанные вихревые токи двух возможных направлений, соответствующие этим состояниям

Fig. 2. Electrical scheme of the basic element of f-NJJs. The phases of the order parameters of the superconducting nodes, χ_1 , χ_2 , and χ_3 , and the phase difference of the Josephson junctions, φ_1 , φ_2 , and φ_3 , are shown. The energies of the two Josephson junctions 1 and 2 (the 0-Josephson junctions) are E_J , and the third Josephson junction (the π -Josephson junction, indicated by the orange cross) has an energy of αE_J . In the frustrated regime, the classical ground state is doubly degenerate. The spontaneous eddy currents of two possible directions corresponding to these states are shown by arrows

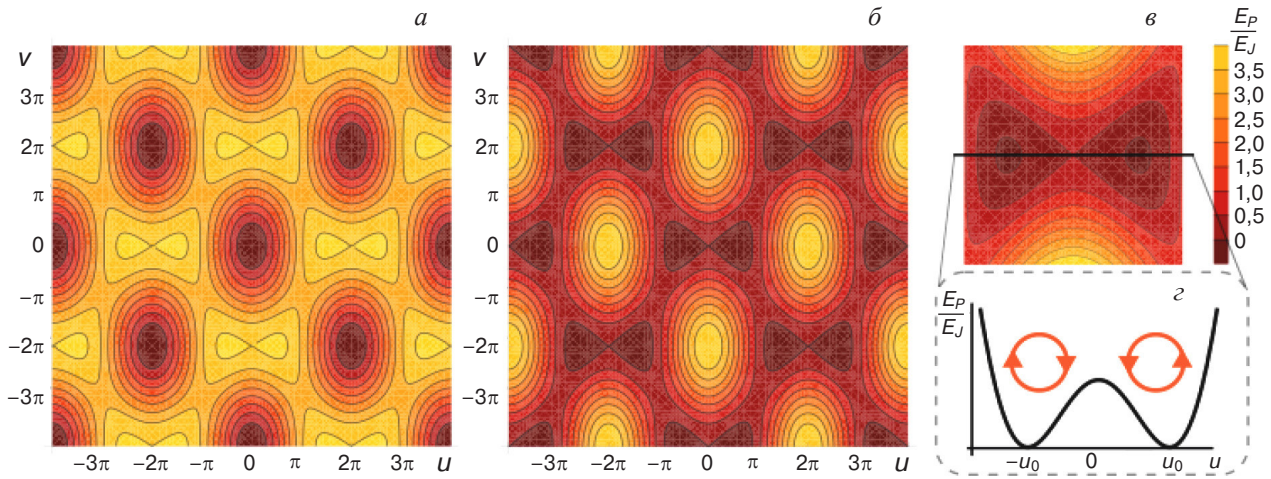


Рис. 3. Зависимости потенциальной энергии E_p/E_J базового элемента ф-СДК от джозефсоновских фаз u и v для разных значений параметра фрустрации α : (а) $\alpha = 0,8$ — нефрустрированный режим; (б) $\alpha = -0,85$ — фрустрированный режим. Зависимость потенциальной энергии E_p/E_J от джозефсоновской фазы u для $v = 0$ обозначена горизонтальной черной линией (в). Эта зависимость представляет собой двухъямный потенциал (г), в котором минимумам потенциальной энергии соответствуют спонтанные вихревые токи, протекающие в противоположных направлениях в базовом элементе, см. рис. 2

Fig. 3. Dependences of the potential energy E_p/E_J of the basic element of f-NJJs on the Josephson phases u and v for different values of the frustration parameter α : (а) $\alpha = 0.8$ — nonfrustrated regime; (б) $\alpha = -0.85$ — frustrated regime. The dependence of the potential energy E_p/E_J on the Josephson phase u for $v = 0$ is indicated by the horizontal black line (в). This dependence is a double well potential (г) with the minima of the potential energy corresponding to spontaneous eddy currents flowing in opposite directions in the basic element; see Fig. 2

На рис. 3 представлены графики зависимости приведенной потенциальной энергии от переменных v и u . При значении параметра $\alpha > \alpha_c = -0,5$ система находится в нефрустрированном режиме (рис. 3, а), α_c — критическое значение параметра фрустрации. В этом режиме потенциальная энергия системы показывает одиночный глобальный минимум (в пределах одного периода переменных v и u) для $v = 0$ и $u = 0$. Если же $-1 < \alpha < \alpha_c$, то система находится во фрустрированном режиме (рис. 3, б), то есть появляются два минимума (рис. 3, в), разделенных потенциальным барьером. При этом джозефсоновская фаза v по-прежнему равна нулю. Джозефсоновские фазы $u_{\pm}$, соответствующие минимумам потенциальной энергии: $u_{\pm} = \pm u_0$,

где $u_0 = 2 \arccos\left(-\frac{1}{2\alpha}\right)$. Высота потенциального барьера $U_0 = -E_J \frac{(1+2\alpha)^2}{2\alpha}$. Можно заметить, что при

приближении параметра фрустрации α к критическому значению α_c , высота потенциального барьера стремится к нулю.

Кинетическая энергия базового элемента ф-СДК зависит от $\dot{u}$ и $\dot{v}$ как:

$$E_K = \sum E_{Ki} = \frac{\hbar^2}{8E_C} \left[(1+2|\alpha|)\dot{u}^2 + \dot{v}^2 \right], \quad (3)$$

где $E_C = e^2/C$ и C — зарядовая энергия и емкость джозефсоновского контакта, соответственно. При выводе этого выражения предполагалось, что $|\alpha| \approx S$, где S — площадь джозефсоновского контакта.

Используя уравнения (2) и (3) можно показать, что джозефсоновская фаза v совершает малые колебания с плазменной частотой $\omega_p = \frac{\sqrt{E_J E_C}}{\hbar}$, но джозефсоновская фаза u в фрустрированном режиме совершает малые колебания с частотой

$$\omega_{fr} = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\frac{(1+2\alpha)(E_J E_C)}{2\alpha}}. \quad (4)$$

При значениях параметра фрустрации α близких к α_c выполняется соотношение $\omega_{fr} \ll \omega_p$. В области низких температур $k_B T \ll \hbar \omega_p$ колебания джозефсоновской фазы v возбуждаться не будут, и в выражении для кинетической и потенциальной энергий можно представить $v = 0$. Таким образом потенциальная энергия (2) имеет вид одномерного двухъямного потенциала (рис. 3, г), а функция Гамильтона, зависящая от $u(t)$ и $\dot{u}(t)$, записывается в виде

$$H = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \frac{1+2|\alpha|}{4E_C} \dot{u}^2 + E_J \left(2 + \alpha - 2 \cos\left(\frac{u}{2}\right) - \alpha \cos u \right). \quad (5)$$

Вводя обобщенный импульс $p_u = \frac{\hbar^2 (1+2|\alpha|)}{8E_C} \dot{u}$,

и заменяя обобщенный импульс p_u оператором $\hat{p}_u = -i\hbar d/du$, найдем, что макроскопическая квантовая динамика базового элемента ф-СДК опи-

сывается эффективным уравнением Шредингера $\hat{H}\Psi = E\Psi$, где гамильтониан $\hat{H}$:

$$\hat{H} = \frac{4E_C}{1+2|\alpha|} \frac{d^2}{du^2} + E_J \left(2 + \alpha - \cos\left(\frac{u}{2}\right) - \alpha \cos u \right). \quad (6)$$

При приближении параметра фрустрации α к α_c расстояние между двумя нижними энергетическими уровнями и третьим велико, следовательно систему можно рассматривать как кубит (двухуровневую систему) или эффективный «спин» [41]. Так, состоянию «спин вверх» $|\uparrow\rangle$ соответствует джозефсоновская фаза $u = -$ в левой потенциальной яме, и вихревой ток, протекающий в контуре по часовой стрелке; «спин вниз» $|\downarrow\rangle$ — джозефсоновской фазе u в правой яме, и вихревому току, протекающему против часовой стрелки (рис. 3, г). Таким образом для базового элемента ф-СДК можно записать эффективный спиновый гамильтониан:

$$\hat{H} = \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_x, \quad (7)$$

где $\hat{\sigma}_x$ — матрица Паули; Δ — разность энергий основного и первого возбужденного состояния. Этот эффективный спиновый гамильтониан позволяет учесть процессы, связанные с макроскопическим тунелированием джозефсоновской фазы.

Значение Δ может быть найдено с помощью численного решения уравнения Шредингера с гамильтонианом (6) или аналитически в квазиклассическом приближении [42], или вариационным методом [42]. Так как в дальнейшем мы будем использовать вариационный метод для нахождения эффективного спинного гамильтониана в больших ф-СДК рассмотрим вариационный метод подробнее. В этом методе волновые функции двух базисных «спиновых» состояний выбираются в виде функций гармонического осциллятора:

$$\Psi_{\pm} = A(\lambda) \exp\left[-\frac{\lambda}{2}(u \mp u_0)^2\right], \quad (8)$$

где λ — вариационный параметр и $A(\lambda)$ находится из условия нормализации волновой функции. Минимизация энергии в одиночном минимуме потенциальной энергии позволяет найти значение вариационного параметра

$$\lambda_0 = \frac{\hbar(1+2|\alpha|)}{8E_C} \omega_{fr}. \quad \text{Разность}$$

энергий между основным и первым возбужденным состояниями определяется как:

$$\Delta = 2 \left| \int du \Psi_- \hat{H} \Psi_+ \right|. \quad (9)$$

Подставляя (8) в (9) и проводя необходимые вычисления интегралов, находим выражение для параметра Δ в следующем виде:

$$\Delta \approx \hbar \omega_{fr} \exp\left[-\frac{\hbar(1+2|\alpha|)}{8E_C} \omega_{fr} u_0^2\right]. \quad (10)$$

Заметим, что квазиклассическое приближение и вариационный метод вычисления Δ приводят к одному и тому же значению экспоненциального множителя, но различным значениям предэкспоненты. Основное состояние гамильтониана (7) представляет собой квантовую суперпозицию классических спиновых состояний, и может быть записано как: $|\psi\rangle = (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$, где состоянию спин вверх (вниз) соответствует джозефсоновская фаза u в левой (правой) потенциальной яме.

Квантовая динамика фрустрированных коротких сетей джозефсоновских контактов

Макроскопическая квантовая динамика ф-СДК определяется квантовой динамикой отдельных базовых элементов ф-СДК (см. эффективный спиновый гамильтониан (7) и взаимодействием (квантовым или классическим) между базовыми элементами ф-СДК.

Рассмотрим квантовое моделирование небольших ф-СДК двух типов: пилообразная квазиодномерная цепочка джозефсоновских контактов с дальнедействующим взаимодействием зарядов джозефсоновских контактов (см. рис. 1, а); двумерная решетка кагомэ джозефсоновских контактов с эффективным взаимодействием, определяемым топологическими условиями (см. рис. 1, б).

Пилообразная фрустрированная цепочка джозефсоновских контактов. Структура фрустрированной пилообразной цепочки джозефсоновских контактов [19, 24, 33, 43] представляет собой последовательность базовых сверхпроводящих треугольников соединенных общим сверхпроводящим островком. Взаимодействие базовых элементов в таких ф-СДК обеспечивается соединением сверхпроводящего островка с землей через емкость C_0 (рис. 4).

Учитывая зарядовую энергию сверхпроводящих островков мы нашли дополнительный вклад в кинетическую энергию системы:

$$E_K^{C_0} = \sum_i \left(\frac{\hbar}{e}\right)^2 \frac{C_0 \dot{\chi}_i^2}{8}. \quad \text{Используя это выражение}$$

был получен полный гамильтониан фрустрированной пилообразной цепочки джозефсоновских контактов, состоящий из N базовых элементов. Для линейной цепочки джозефсоновских контактов макроскопическая динамика системы как целой может быть исключена из рассмотрения, и следовательно квантовая динамика определяется полностью переменными u_i .

Общие свойства такого гамильтониана мы рассмотрим на примере фрустрированной пило-

образной цепочки джозефсоновских контактов, состоящей из двух базовых элементов. Полный гамильтониан для такой системы имеет вид:

$$\hat{H} = -\gamma \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} - \gamma \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} + 4\gamma\beta \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial u_2} + E_p, \quad (11)$$

где $\gamma = \frac{4e^2}{C(1+2|\alpha|)}$ и $\beta = C_0/C$. Третье слагаемое в

правой части (11) пропорционально емкости C_0 и определяет зарядовое взаимодействие между базовыми элементами ф-СДК. Если $C_0 = 0$, то взаимодействие отсутствует, и полный гамильтониан может быть представлен в форме эффективного

спинового гамильтониана независимых базовых

элементов ф-СДК: $\hat{H} = \sum_i \left(\frac{\Delta}{2}\right) \hat{\sigma}_{x,i}$. В отсутствии взаимодействия между базовыми элементами ф-СДК волновая функция системы выражается как: $|\Psi_{gr}\rangle = \prod_{i=1}^N \Psi_i$, и, следовательно, квантовая запутанность в системе отсутствует.

В присутствии взаимодействия, то есть если $C_0 \neq 0$, мы найдем эффективный спиновый гамильтониан с помощью вариационного метода. Для этого выберем пробную волновую функцию системы в виде:

$$\Psi\{\hat{\sigma}_{z,i}\} = A \exp \left[-\sum_{i=1,2} \frac{\lambda}{2} (u_i - \hat{\sigma}_{z,i} u_0)^2 \right] \times \exp \left[-\sum_{i,j=1,2} \frac{\xi}{2} (u_i - \hat{\sigma}_{z,i} u_0)(u_j - \hat{\sigma}_{z,j} u_0) \right], \quad (12)$$

где $\hat{\sigma}_z$ — соответствующая матрица Паули, а индекс i соответствует номеру базового элемента в системе. Последнее слагаемое в показателе степени экспоненты описывает взаимодействие двух ячеек ф-СДК. Минимизируя энергию системы с помощью пробной волновой функции (12) найдем соотношения коэффициентов λ и ξ :

$$(\lambda - \xi)^2 = \frac{\hbar^2(1+2|\alpha|)^2}{64E_C^2} \frac{\omega_{fr}^2}{(1+2\beta)}. \quad (13)$$

При стремлении параметра β к нулю, варьируемые параметры $\lambda \simeq \lambda_0$, а $\xi \simeq 0$, и, следовательно, устремив емкость C_0 к нулю, система ожидаемо вернется к совокупности независимых базовых элементов. Из равенства (13) видно, что для малых значений C_0 вариационный параметр $\xi \simeq \beta$. С другой стороны, если параметр $\beta \gg 1$, то $\lambda \simeq \xi$.

Для ф-СДК, состоящей из двух взаимодействующих ячеек, (см. рис. 1, а) эффективный спиновый гамильтониан — матрица 4×4 , построенный на четырех базисных спиновых состояниях: $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\downarrow\rangle$. Оценка матричных элементов $H_{mn} = \prod_i \int du_i \Psi_m^\dagger \hat{H} \Psi_n$, где m и n — два базисных спи-

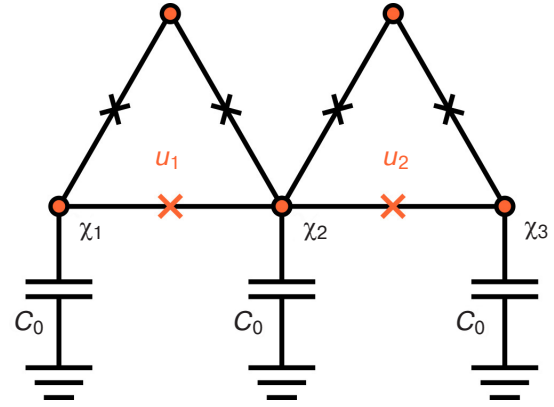


Рис. 4. Пилообразная цепочка джозефсоновских контактов, состоящая из двух базовых элементов, соединенных через сверхпроводящий остров. Емкость на землю C_0 обеспечивает взаимодействие базовых элементов. Джозефсоновские фазы π -контактов обозначены $u_{1,2}$

Fig. 4. A sawtooth chain of Josephson junctions consisting of two basic elements connected through a superconducting node. The capacitance to ground C_0 provides the interaction of the basic elements. The Josephson phases of the π -junctions $u_{1,2}$ are shown

новых состояний, может быть проведена для режима в котором выполнено условие $\Delta \ll \omega_{fr}$, то есть режим взаимодействующих кубитов. Матричный элемент гамильтониана, связанный с изменением спинового состояния (переворотом спина) только в одной ячейке, например $H_{(\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\downarrow)}$ будет равен

$$H_{(\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\downarrow)} \sim e^{-\lambda u_0^2} \simeq \Delta. \quad (14)$$

Полученная амплитуда вероятности перехода $(\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\downarrow)$ имеет ту же экспоненциальную зависимость, что и амплитуда вероятности перехода между базисными состояниями в одной ячейке, $(\uparrow \rightarrow \downarrow)$.

При когерентном перевороте спинов в обеих ячейках матричные элементы гамильтониана зависят от начальных и конечных состояний системы. Если обе ячейки изначально были в состояниях с противоположными спинами, то матричный элемент $H_{(\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\uparrow)}$.

$$H_{(\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\uparrow)} \sim e^{(-2u_0^2(\lambda - \xi))}. \quad (15)$$

Если же обе ячейки изначально были в состояниях с одинаковыми спинами, то матричный элемент

$$H_{(\uparrow\uparrow \rightarrow \downarrow\downarrow)} \sim e^{(-2u_0^2(\lambda + \xi))}. \quad (16)$$

Как видно из выражения (13) в системе с $\beta = C_0/C \ll 1$ будет выполняться соотношение параметров $\lambda \gg \xi$. Следовательно, переворот спина в одной ячейке определяет максимальный матричный элемент, $H_{(\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\downarrow)}$, эффективного спинового гамильтониана. Остальные матричные элементы можно учесть как возмущение. В этом режиме ($\beta = C_0/C \ll 1$) джозефсоновские контакты, относя-

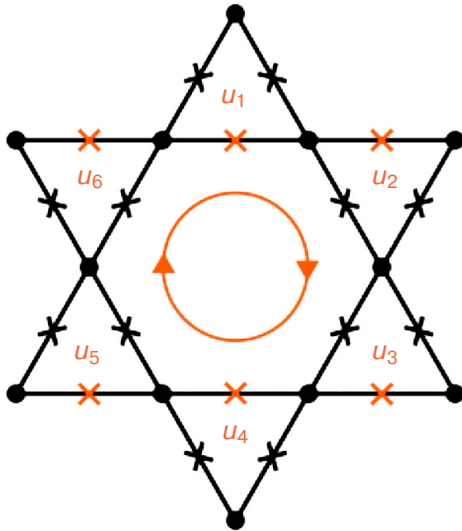


Рис. 5. Ячейка фрустрированной кагомэ решетки джозефсоновских контактов, состоящая из шести базовых элементов. Каждый элемент описывается джозефсоновской фазой π -контакта, u_i . Взаимодействие базовых элементов обеспечивается равенством нулю суммы фаз джозефсоновских контактов при обходе по внутреннему контуру (второе топологическое ограничение)

Fig. 5. A cell of the frustrated kagome lattice of Josephson junctions consisting of six basic elements. Each element is described by the Josephson phase of π -junction, u_i . The interaction of the basic elements is ensured by the equality to zero of the sum of the phases of the Josephson junctions during the inner loop traversal (the second topological constraint)

щиеся к разным ячейкам, слабо взаимодействовать между собой, квантовое запутывание слабо выражено. Таким образом вся система описывается произведением волновых функций состояний отдельных ячеек, а в каждой из ячеек в свою очередь реализуется суперпозиция состояний $\uparrow$ и $\downarrow$.

В противоположном режиме, при $\beta = C_0/C \gg 1$, находим, что $\lambda \simeq \xi$. В этом случае в системе будет реализовано максимальное квантовое запутывание: наибольшим по значению будет матричный элемент, соответствующий обменному взаимодействию (15), и состояние системы описывается волновой функцией: $\Psi = (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/2$. Остальные матричные элементы экспоненциально малы по сравнению с обменным взаимодействием $H_{(\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\uparrow)}$.

Макроскопические квантовые когерентные состояния, возникающие в пилообразных фрустрированных цепочках джозефсоновских контактов длины N , где N — количество базовых элементов (треугольных ячеек) в цепочке, были также проанализированы. Квантовые состояния зависят от соотношения между N и характерной длиной $N_0 = \sqrt{C/C_0}$. Если $N \ll N_0$ (короткие фрустрированные пилообразные цепочки), то макроскопическое квантовое состояние определяется квантовой суперпозицией в отдельных базовых элементах, и квантовая запутанность в системе отсутствует. В противоположном случае $N \gg N_0$ (длинные фрустрированные пилообразные цепочки) квантовое

туннелирование в отдельных базовых элементах сильно подавлено, и преобладает дальнodelствующее обменное взаимодействие между спинами разных ячеек. Такая система обеспечивает максимальное значение квантовой запутанности. Таким образом детальное исследование макроскопических квантовых состояний и их квантовой запутанности в пилообразных цепочках джозефсоновских контактов большого размера может быть перспективной темой дальнейших исследований.

2D-фрустрированная решетка кагомэ джозефсоновских контактов. Фрустрированная ячейка кагомэ джозефсоновских контактов состоит из шести базовых элементов, соединенных в узлах таким образом, чтобы π -джозефсоновские контакты были расположены вдоль горизонтальных прямых (рис. 1, б и рис. 5). Такая ф-СДК содержит внутренний замкнутый сверхпроводящий контур в который входят два π -джозефсоновских контакта и четыре 0-джозефсоновских контакта.

Взаимодействие между базовыми элементами в такой структуре определяется вторым топологическим условием: в ячейке кагомэ [19, 28, 33, 34] образуется еще один замкнутый контур и сумма джозефсоновских фаз при обходе по нему равна нулю. Соответственно, второе топологическое условие записывается как:

$$\sum_{i=1}^6 \eta_i u_i = 0, \quad (17)$$

где $\eta_{1,4} = 1$ и $\eta_{2-3;5-6} = 1/2$.

Для того, чтобы найти эффективный спин-овый гамильтониан для одиночной фрустрированной ячейки кагомэ джозефсоновских контактов, мы использовали следующий метод. Так как все базовые элементы ф-СДК одинаковы, минимумы потенциальной энергии каждого из них достигаются при значениях джозефсоновской фазы $u_i = \pm u_0$. Также ниже для описания динамики вблизи этих минимумов мы введем матрицу Паули $\hat{\sigma}_z$, и запишем равновесную статистическую сумму при температуре T в виде:

$$Z = \prod_{i=1}^6 \int du_i e^{\frac{E_J}{k_B T} \frac{(1+2\alpha)^2}{2\alpha u_0^2} \sum_i (u_i - \hat{\sigma}_{z,i} u_0)^2} \times \delta \left[\sum_{j=1}^6 \xi_j u_j \right]. \quad (18)$$

Наличие δ -функции в правой части выражения (18) позволяет учесть второе топологическое условие. Вычисляя интегралы по переменным u_i , мы нашли статистическую сумму эффективной спиновой модели:

$$Z \simeq \exp \left[-\frac{U_0}{k_B T} \frac{1}{\sum_i \xi_i^2} \left(\sum_{i=1}^6 \xi_i \hat{\sigma}_{z,i} \right)^2 \right]. \quad (19)$$

Учитывая, что статистическую сумму можно записать как

$$I = \exp\left(-\frac{U_{\text{int}}}{k_B T}\right), \quad (20)$$

где U_{int} — энергия попарного взаимодействия спинов b -и базовых элементов. Учитывая возможность переворота спина в каждом базовом элементе, найдем эффективный спиновый гамильтониан для одной ячейки фрустрированной решетки кагомэ джозефсоновских контактов:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^6 \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_{x,i} - \frac{E_J (1 + 2\alpha)^2}{6\alpha} \left(\sum_{j=1}^6 \xi_j \sigma_j \right)^2. \quad (21)$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (21) определяет двухчастичные взаимодействия между спинами базовых элементов. Наличие такого взаимодействия, обусловленного вторым топологическим условием, приводит к интересным результатам:

- классическому температурному фазовому переходу между парамагнитным спиновым состоянием, реализующееся в режиме $k_B T \gg U_0$, и классически вырожденными спиновыми состояниями (для температур $\Delta \ll k_B T \ll U_0$) [19];
- в режиме $\Delta \ll k_B T \ll U_0$ классическое основное состояние может быть реализовано в одной из 14 спиновых конфигураций [34];
- учет макроскопического квантового туннелирования в базовых элементах приводит к квантовой суперпозиции 12-и классических спиновых конфигураций, и следовательно к квантовой запутанности в системе [19].

Заключение

В данной работе представлено квантовое моделирование динамики фрустрированных сетей джозефсоновских контактов (ф-СДК), и теоретический анализ квантовых и классических макроскопических состояний возникающих в двух типичных реализациях ф-СДК: квазиодномерной пилообразной цепочке джозефсоновских контактов (см. рис. 1, а) и двумерной решетке кагомэ (см. рис. 1, б). Фрустрация вводится с помощью периодического расположения 0- и π -джозефсоновских контактов. Мы нашли, что такие ф-СДК показывают фрустрированный режим, если параметр фрустрации f удовлетворяет условию, $f_{\text{cr}} \geq f \geq 1$. Фрустрированный режим описывается эффективным гамильтонианом взаимодействующих спинов. Спины каж-

дого базового элемента ф-СДК, то есть трех сверхпроводящих островков, соединенных одним π - и двумя 0-джозефсоновскими контактами (2), соответствуют вихревым токам, протекающим в противоположных направлениях. Макроскопическое квантовое туннелирование джозефсоновской фазы определяет процессы, связанные с изменением направления протекания вихревого тока («переворот спина») в каждом базовом элементе. Отметим, что такое моделирование базового элемента ф-СДК полностью соответствует состоянию одиночного потокового кубита, настроенного на работу в симметричной точке по магнитному полю [12].

В ф-СДК квантовые состояния системы определяются комбинацией двух эффектов: индуцированные квантовым туннелированием перевороты спина в каждом базовом элементе и взаимодействием спинов, принадлежащим разным базовым элементам. В квазиодномерной пилообразной цепочке джозефсоновских контактов мы рассмотрели дальнедействующее взаимодействие зарядов локализованных на сверхпроводящих островках. Величина взаимодействия регулируется емкостью сверхпроводящих островков, C_0 . Такое взаимодействие может приводить к квантовым коллективным состояниям с большой квантовой запутанностью.

Для одиночной ячейки фрустрированной решетки кагомэ джозефсоновских контактов мы рассмотрели двухчастичные взаимодействия спинов различных базовых элементов, возникающие из-за дополнительных топологических условий, то есть сумма джозефсоновских фаз при обходе по замкнутому контуру внутри СДК должен равняться нулю. Такое взаимодействие приводит как к уменьшению вырождения основного состояния в классическом режиме, так и к коллективным квантовым состояниям, характеризующимся максимальной квантовой запутанностью.

Квантовое моделирование, учет разнообразных типов взаимодействия, и анализ квантовых коллективных состояний, возникающих в ф-СДК, основанных на базовых сверхпроводящих структурах с двумя 0-джозефсоновскими контактами и одним π -джозефсоновским контактом свидетельствуют о том, что фрустрированные сети джозефсоновских контактов являются удобной экспериментальной системой для того, чтобы проводить квантовое аналоговое моделирование различных сильнодействующих электронных систем, а также для развития новых типов адиабатических квантовых компьютеров.

Библиографический список / References

1. Beloborodov I.S., Efetov K.B., Lopatin A.V., Vinokur V.M. Granular electronic systems. *Reviews of Modern*

Physics. 2007; 79(2): 469. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.79.469>

2. van der Zant H.S.J., Elion W.J., Geerligs L.J., Mooij J.E. Quantum phase transitions in two dimensions: Experiments in Josephson-junction arrays. *Physical Review B. Condensed matter*. 1996; 54(14): 10081. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.54.10081>
3. Fazio R., van der Zant H.S.J. Quantum phase transitions and vortex dynamics in superconducting networks. *Physics Reports*. 2001; 355(4): 235—334. [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(01\)00022-9](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(01)00022-9)
4. Rzchowski M.S. Phase transitions in a kagom'e lattice of Josephson junctions. *Physical Review B. Condensed matter*. 1997; 55: 11745—11750. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.55.11745>
5. Feofanov A.K., Oboznov V.A., Bol'ginov V.V., Lisenfeld J., Poletto S., Ryazanov V.V., Rossolenko A.N., Khabipov M., Balashov D., Zorin A.B., Dmitriev P.N., Koshelets V.P., Ustinov A.V. Implementation of superconductor/ferromagnet/ superconductor pi-shifters in superconducting digital and quantum circuits. *Nature Physics*. 2010; 6(8): 593—597. <https://doi.org/10.1038/nphys1700>
6. Jeanneret B., Benz S.P. Application of the Josephson effect in electrical metrology. *The European Physical Journal Special Topics*. 2009; 172(1): 181—206. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2009-01050-6>
7. Mukhanov O.A. Energy-efficient single flux quantum technology. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*. 2011; 21(3): 760—769. <https://doi.org/10.1109/TASC.2010.2096792>
8. Fedorov A.K., Akimov A.V., Biamonte J.D., Kavokin A.V., Khalili F.Ya., Kiktenko E.O., Kolachevsky N.N., Kurochkin Y.V., Lvovsky A.I., Rubtsov A.N., Shlyapnikov G.V., Straupe S.S., Ustinov A.V., Zheltikov A.M. Quantum technologies in Russia. *Quantum Science and Technology*. 2019; 4(4): 040501. <https://doi.org/10.1088/2058-9565/ab4472>
9. Acin A., Bloch I., Buhrman H., Calarco T., Eichler Ch., Eisert J., Esteve D., Gisin N., Glaser S.J., Jelezko F., Kuhr S., Lewenstein M., Riedel M.F., Schmidt P.O., Thew R., Wallraff A., Walmsley I., Wilhelm F.K. The quantum technologies roadmap: a European community view. *New Journal of Physics*. 2018; 20(8): 080201. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/aad1ea>
10. Gyongyosi L., Imre S. A survey on quantum computing technology. *Computer Science Review*. 2019; 31(9): 51—71. <https://doi.org/10.1016/j.cosrev.2018.11.002>
11. Siddiqi I. Engineering high-coherence superconducting qubits. *Nature Reviews Materials*. 2021; 6(10): 875—891. <https://doi.org/10.1038/s41578-021-00370-4>
12. Orlando T.P., Mooij J.E., Tian L., van der Wal C.H., Levitov L.S., Lloyd S., Mazo J.J. Superconducting persistent-current qubit. *Physical Review B. Condensed matter*. 1999; 60(22): 15398—15413. <https://doi.org/10.1103/physrevb.60.15398>
13. Krantz Ph., Kjaergaard M., Yan F., Orlando T.P., Gustavsson S., Oliver W.D. A quantum engineer's guide to superconducting qubits. *Applied Physics Reviews*. 2019; 6(2): 021318. <https://doi.org/10.1063/1.5089550>
14. Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz Ph., Wang J.I.—J., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting qubits: Current state of play. *Annual Review of Condensed Matter Physics*. 2020; 11: 369—395. <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>
15. King A.D., Carrasquilla J., Raymond J., Ozfidan I., Andriyash E., Berkley A., Reis M., Lanting T., Harris R., Altomare F., Boothby K., Bunyk P.I., Enderud C., Fréchet A., Hoskinson E., Ladizinsky N., Oh T., Poulin-Lamarre G., Rich Ch., Sato Y., Smirnov A.Yu., Swenson L.J., Volkmann M.H., Whittaker J., Yao J., Ladizinsky E., Johnson M.W., Hilton J., Amin M.H. Observation of topological phenomena in a programmable lattice of 1,800 qubits. *Nature*. 2018; 560(7719): 456—460. <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0410-x>
16. King A.D., Raymond J., Lanting T., Harris R., Zucca A., Altomare F., Berkley A.J., Boothby K., Ejtemaee S., Enderud C., Hoskinson E., Huang Sh., Ladizinsky E., MacDonald A.J.R., Marsden G., Molavi R., Oh T., Poulin-Lamarre G., Reis M., Rich C., Sato Y., Tsai N., Volkmann M., Whittaker J.D., Yao J., Sandvik A.W., Amin M.H. Quantum critical dynamics in a 5,000-qubit programmable spin glass. *Nature*. 2023; 617(7959): 61—66. <https://doi.org/10.1038/s41586-023-05867-2>
17. Park H., Lee H. Frustrated Ising model on d-wave quantum annealing machine. *Journal of the Physical Society of Japan*. 2022; 91(7): 074001. <https://doi.org/10.7566/JPSJ.91.074001>
18. Xu K., Chen J.—J., Zeng Y., Zhang Y.—R., Song Ch., Liu W., Guo Q., Zhang P., Xu D., Deng H., Huang K., Wang H., Zhu X., Zheng D., Fan H. Emulating many-body localization with a superconducting quantum processor. *Physical Review Letters*. 2018; 120(5): 050507. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.050507>
19. Neyenhuys O., Fistul M.V., Eremin I.M. Long-range Ising spins models emerging from frustrated Josephson junctions arrays with topological constraints. *Physical Review B. Condensed matter*. 2023; 108: 165413. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.108.165413>
20. Anderson P.W. The concept of frustration in spin glasses. *Journal of the Less Common Metals*. 1978; 62: 291—294. [https://doi.org/10.1016/0022-5088\(78\)90040-1](https://doi.org/10.1016/0022-5088(78)90040-1)
21. Moessner R., Ramirez A.P. Geometrical frustration. *Physics Today*. 2006; 59(2): 24—29. <https://doi.org/10.1063/1.2186278>
22. Balents L. Spin liquids in frustrated magnets. *Nature*. 2010; 464(7286): 199—208. <https://doi.org/10.1038/nature08917>
23. Mi X., Sonner M., Niu M.Y. et al. Noise-resilient edge modes on a chain of superconducting qubits. *Science*. 2022; 378(6621): 785—790. <https://doi.org/10.1126/science.abq5769>
24. Douçot B., Vidal J. Pairing of Cooper pairs in a fully frustrated Josephson-junction chain. *Physical Review Letters*. 2002; 8(22): 227005. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.88.227005>
25. Heras U.L., Mezzacapo A., Lamata L., Filipp S., Wallraff A., Solano E. Digital quantum simulation of spin systems in superconducting circuits. *Physical Review Letters*. 2014; 112(20): 200501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.200501>
26. Nisoli C., Moessner R., Schiffer P. Colloquium: Artificial spin ice: Designing and imaging magnetic frustration. *Reviews of Modern Physics*. 2013; 85(4): 1473. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.1473>
27. Bell R.E. Frustration in physics. *Physics Today*. 1982; 35(8): 78—78. <https://doi.org/10.1063/1.2915237>
28. Gilbert I., Nisoli C., Schiffer P. Frustration by design. *Physics Today*. 2016; 69(7): 54—59. <https://doi.org/10.1063/PT.3.3237>
29. Baniodeh A., Magnani N., Lan Y., Buth G., Anson Ch.E., Richter J., Affronte M., Schnack J., Powell A.K. High spin cycles: topping the spin record for a single molecule verging on quantum criticality. *npj Quantum Materials*. 2018; 3(1): 10. <https://doi.org/10.1038/s41535-018-0082-7>

30. Han T.-H., Helton J.S., Chu Sh., Nocera D.G., Rodriguez-Rivera J.A., Broholm C., Lee Y.S. Fractionalized excitations in the spin-liquid state of a kagome-lattice antiferromagnet. *Nature*. 2012; 492(7429): 406—410. <https://doi.org/10.1038/nature11659>
31. Mahmoudian S., Rademaker L., Ralko A., Frati ni S., Dobrosavljević V. Glassy dynamics in geometrically frustrated coulomb liquids without disorder. *Physical Review Letters*. 2015; 115(2): 025701. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.025701>
32. Caputo P., Fistul M.V., Ustinov A.V. Resonances in one and two rows of triangular Josephson junction cells. *Physical Review B. Condensed matter*. 2001; 63(21): 214510. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.63.214510>
33. Andreanov A., Fistul M.V. Resonant frequencies and spatial correlations in frustrated arrays of Josephson type nonlinear oscillators. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2019; 52(10): 105101. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab013d>
34. Andreanov A., Fistul M.V. Frustration-induced highly anisotropic magnetic patterns in the classical xy model on the kagome lattice. *Physical Review B. Condensed matter*. 2020; 102(14): 140405. <https://doi.org/10.1103/physrevb.102.140405>
35. Pop I.M., Hasselbach K., Buisson O., Guichard W., Pannetier B., Protopopov I. Measurement of the current-phase relation in Josephson junction rhombi chains. *Physical Review B. Condensed matter*. 2008; 78(10): 104504. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.104504>
36. Rizzi M., Cataudella V., Fazio R. $4e$ -condensation in a fully frustrated Josephson junction diamond chain. *Physical Review B. Condensed matter*. 2006; 73(10): 100502(R). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.73.100502>
37. Protopopov I.V., Feigel'man M.V. Anomalous periodicity of supercurrent in long frustrated Josephson-junction rhombi chains. *Physical Review B. Condensed matter*. 2004; 70(18): 184519. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.70.184519>
38. Hilgenkamp H. Pi-phase shift Josephson structures. *Superconductor Science and Technology*. 2008; 21(3): 034011. <https://doi.org/10.1088/0953-2048/21/3/034011>
39. Sondhi Sh.L., Girvin S.M., Carini J.P., Shahar D. Continuous quantum phase transitions. *Reviews of Modern Physics*. 1997; 69(1): 315. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.69.315>
40. Haviland D.B., Andersson K., Agren P. Superconducting and insulating behavior in one-dimensional Josephson junction arrays. *Journal of Low Temperature Physics*. 2000; 118(5): 733—749. <https://doi.org/10.1023/A:1004603814529>
41. Ильичев Е.В. Введение в динамику сверхпроводящих квантовых цепей. Новосибирск: НГТУ; 2018. 174 с.
Il'ichev E.V. Introduction to the dynamics of superconducting quantum circuits. Novosibirsk: NGTU; 2018. 174 p. (In Russ.)
42. Landau L.D., Lifshitz E.M. Quantum mechanics: non-relativistic theory. Elsevier; 2013. Vol. 3. 300 p.
43. Derzhko O., Honecker A., Richter J. Low-temperature thermodynamics for a flat-band ferromagnet: Rigorous versus numerical results. *Physical Review B. Condensed matter*. 2007; 76(22): 220402. <https://doi.org/10.1103/physrevb.76.220402>

Информация об авторах / Information about the authors

Бурцев Павел Сергеевич — лаборант-исследователь, магистр, дизайн-центр квантового проектирования, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», Ленинский просп., д. 4, стр. 1, Москва, 119049, Российская Федерация; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-3931-1058>; e-mail: ps.burtsev@misis.ru

Мигдисов Роман Александрович — лаборант-исследователь, магистр, дизайн-центр квантового проектирования, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», Ленинский просп., д. 4, стр. 1, Москва, 119049, Российская Федерация; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3736-3687>; e-mail: m1910570@edu.misis.ru

Малеева Наталия Андреевна — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, лаборатория криоэлектронных систем, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», Ленинский просп., д. 4, стр. 1, Москва, 119049, Российская Федерация; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1142-2626>; e-mail: n.maleeva@misis.ru

Фистуль Михаил Викторович — канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, лаборатория сверхпроводниковых квантовых технологий, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», Ленинский просп., д. 4, стр. 1, Москва, 119049, Российская Федерация; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0265-2534>; e-mail: fistul@tp3.rub.de

Pavel S. Burtsev — Research Assistant, Master, Quantum Design Center, National University of Science and Technology "MISIS", 4-1 Leninsky Ave., Moscow 119049, Russian Federation; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-3931-1058>; e-mail: ps.burtsev@misis.ru

Roman A. Migdisov — Research Assistant, Master, Quantum Design Center; National University of Science and Technology "MISIS", 4-1 Leninsky Ave., Moscow 119049, Russian Federation; ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3736-3687>; e-mail: m1910570@edu.misis.ru

Nataliya A. Maleeva — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Laboratory for Cryoelectronic Systems; National University of Science and Technology "MISIS", 4-1 Leninsky Ave., Moscow 119049, Russian Federation; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1142-2626>; e-mail: n.maleeva@misis.ru

Mikhail V. Fistul — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher, Laboratory of Superconducting Quantum Technologies, National University of Science and Technology "MISIS", 4-1 Leninsky Ave., Moscow 119049, Russian Federation; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0265-2534>; e-mail: fistul@tp3.rub.de

Поступила в редакцию 14.12.2023; поступила после доработки 25.03.2024; принята к публикации 07.05.2024
Received 14 December 2023; Revised 25 March 2024; Accepted 7 May 2024